



Statik

Unterrichtsplanung für TGT-J1

Inhaltsverzeichnis

Lehrplan	2
Statik	3
Definition, Zweck.....	3
Vereinfachungen für die Schule.....	3
Darstellungen von Kräften.....	3
Rechnen mit Kräften in der Statik.....	3
Gleichgewichtsbedingungen (allg.).....	3
Die Hauptachsen im Raum.....	3
Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D.....	3
Aufgabe lösbar in der Ebene?.....	3
Aufgabe lösbar am Punkt?.....	3
Das Reaktionsprinzip und seine Folgen.....	3

Statik I: Zentrales Kräftesystem

Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln	4
Zusammensetzen von Kräften.....	4
Arbeitsplan.....	4
0. Lageplanskizze.....	4
1. Lageplan.....	4
2. Kräfteplan.....	4
3. Resultierende F_R / Gegenkraft F	4
Zerlegen von Kräften.....	4
Arbeitsplan.....	4
4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen.....	4
Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen.....	4
Kräfte am Punkt berechnen	5
Zusammensetzen – systematische Lsg.....	5
Arbeitsplan.....	5
1. Lageplanskizze.....	5
2. Koordinatensystem festlegen.....	5
3. Tabelle der Kräfte erstellen.....	5
4. Kräfte in Komponenten zerlegen.....	5
5. Komponenten addieren.....	5
6. Betrag $ F_R $ der Resultierenden.....	5
7. Richtung α_R der Resultierenden.....	5
Zerlegen - individuelle Lösung.....	5
Prinzip.....	5
Rechtwinklige Dreiecke.....	5
Winkelfunktionen.....	5
Beliebige Dreiecke.....	5
Sinussatz.....	5
Systematische Lösung – Zerlegen.....	6
8. Kräftegleichgewichte $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$	6
Freimachen von Körpern	7
Zweck.....	7
Vorgehensweise.....	7
1. Baugruppe wählen.....	7
2. Alle Kräfte eintragen.....	7
3. Bekannte Kräfte mit Richtung.....	7
4. Unbekannte Kräfte.....	7
5. Lösbarkeit prüfen.....	7

6. Lageplanskizze anfertigen.....	7
Hinweise auf Richtungen von Kräften.....	7
Seile, Ketten usw.....	7
Zweigenkstäbe (Pendelstützen).....	7
Berührflächen.....	7
Rollkörper.....	7
Lose und feste Lager.....	8
Einwertige Lager (Loslager).....	8
Zweiwertige Lager (Festlager).....	8
Dreiwertige Lager.....	8

Statik II: Allgemeines Kräftesystem

3-Kräfteverfahren	9
Anwendung.....	9
Arbeitsplan.....	9
0. Lageplanskizze.....	9
1. Lageplan.....	9
2. Kräfteplan.....	9
Lösungsgedanke.....	9
4-Kräfteverfahren	9
Anwendung.....	9
Arbeitsplan.....	9
1. Lageplan.....	9
2. Kräfteplan.....	9
Lösungsgedanke.....	9
Hinweise zur Konstruktion.....	9
Auflagerkräfte in der Ebene berechnen	11
Arbeitsplan.....	11
1. Freimachen + Lageskizze erstellen.....	11
2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.).....	11
3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen.....	11
mögliche Vereinfachungen.....	11
4. Momentengleichgewicht $\sum M = 0$	11
Tipp 1: Wahl des Drehpunktes.....	11
5. Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen.....	11
Tipp 2: Komponenten statt Hebelarm.....	11
Tipp 3: Kraftkomponenten skizzieren.....	11
6. Kräftegleichgewichte $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$	11
7. ggf. zusätzliche Gleichungen.....	11
8. Gleichungssystem lösen.....	11
Wenn es ein Festlager gibt.....	11
9. Betrag und Richtung ermitteln.....	11
10. Plausibilität prüfen.....	11
Schlusslinienverfahren (Auflager zeichnerisch ermitteln)	13
Anwendung.....	13
Arbeitsplan.....	13
1. Lageplan.....	13
2. Kräfteplan.....	13

3. KP: Anschluss der unbekannten Kräfte festlegen.....	13
4. KP: Pol P wählen.....	13
5. KP: Polstrahlen einzeichnen.....	13
6. LP: Seilstrahlen übertragen.....	13
7. LP: Schlusslinie eintragen.....	13
8. KP: Schlusslinie übertragen.....	13
9. KP vervollständigen.....	13
Lösungsgedanke.....	13
Schlusslinienverfahren in Bildern.....	14

Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten

Beträgen	16
Anwendung.....	16
Besonderheiten bei 3 WL.....	16
0. Lageplanskizze.....	16
2a. Kräfteplan.....	16
2b. Kräfteplan.....	16

Seileckverfahren	17
Anwendung.....	17
Prinzip.....	17
Beispiel.....	17

Kombination aus SEV und 4KV	17
Anwendung.....	17
Arbeitsplan.....	17
Kräfte mit SEV zusammenfassen.....	17
Resultierende mit 4KV zerlegen.....	17

Nicht unterrichten

Kraft und Beschleunigung	18
Newton 1: Trägheitsprinzip.....	18
Newton 2: Aktionsprinzip.....	18
Gewichtskraft.....	18
Newton 3: Reaktionsprinzip.....	18
Prinzip von d'Alembert.....	18

Grundoperationen der Statik	19
1. Kräfteparallelogramm.....	19
2. Längsverschiebung.....	19
3. Erweiterungssatz.....	19
4. Parallelverschiebung.....	19
(Kraft-)Moment einer Einzelkraft.....	19
Definition.....	19
Kräftepaare.....	19

Resultierende Kraft in der Ebene berechnen	20
Anwendung.....	20
Arbeitsplan.....	20
1. - 7. F_R und α_R wie im zentralen KS.....	20
8. Lage von F_G / F_R per $\sum M = 0$	20
8a. Drehpunkt wählen.....	20
7b. Momentengleichgewicht $\sum M = 0$	20

Literaturverzeichnis	20
-----------------------------------	----



Lehrplan

Richtziele des Unterrichts in Jahrgangsstufe 12

Die Schüler ... erkennen die Statik als Grundlage jeder technischen Konstruktion. Sie üben sich in der Anwendung grafischer und algebraischer Lösungsverfahren. Dies zwingt sie zur Sorgfalt, Genauigkeit und zum systematischen Denken.

21	Statik I	15 Stunden
21.1	Bauteile freimachen und Grundoperationen der Statik beherrschen	Kräfte – resultierende, Gleichgewicht, Parallelogramm, Erweiterungssatz, Längs-, Parallelverschiebung
21.2	Resultierende und unbekannte Kräfte bestimmen	Statik in der Ebene Kraftmoment (Versatzmoment) Getrennter Lage- und Kräfteplan $FRx = \sum Fix$; $FRy = \sum Fiy$ $\sum Fix = 0$; $\sum Fiy = 0$
		Zentrales Kräftesystem – zeichnerische und rechnerische Bestimmung einer Resultierenden – zeichnerische und rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte bei Gleichgewicht

Jahrgangsstufe 12.2

30	Statik II	22,5 Stunden
30.1	Resultierende und unbekannte Kräfte bestimmen	Allgemeines Kräftesystem – zeichnerische und rechnerische Bestimmung einer Resultierenden: Seileckverfahren, Momentensatz – zeichnerische und rechnerische Bestimmung unbekannter Kräfte bei Gleichgewicht: Dreikräfteverfahren, Vierkräfteverfahren, Schlusslinienverfahren, Momentensatz
30.2	Technische Bedeutung der Reibung erkennen und Kräfte an Bauteilen mit Reibung bestimmen	Reibung – Reibungsgesetz für Haft- und Gleitreibung – rechnerische und zeichnerische Lösung
		$MR = \sum Mi$ $\sum Mi = 0$ einschließlich schiefe Ebene, ohne Schraube

Jahrgangsstufe 13.1

37	Festigkeitslehre	38 Stunden
37.1	Die an Bauteilen wirkenden Belastungen erkennen, daraus herrührende Beanspruchungsarten unterscheiden und Spannungen zuordnen. Die Werkstoffkennwerte R_m ; $R_{p0,2}$; R_e in der Festigkeitsrechnung einsetzen	Grundbegriffe – Belastungen durch Kräfte und Momente – Normalkräfte, Querkkräfte – Beanspruchung – Zug, Druck, Flächenpressung, Biegung, Abscheren, Torsion – Spannung – Normalspannung, Schubspannung, zulässige Spannung, Sicherheit
37.2	Zug- und Druckbeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Keine Vergleichsspannung Kein Verspannungsschaubild
37.3	Biegebeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Spannungsverteilung im Zug- bzw. Druckquerschnitt Dimensionierung elastische Verformung Flächenpressung Schraube – Festigkeitsklassen – Metrisches Gewinde, Trapezgewinde
37.4	Torsionsbeanspruchung erkennen, Bauteile berechnen	Spannungsverteilung im Biegequerschnitt Lage und Betrag des maximalen Biegemoments axiales Widerstandsmoment Biegehauptgleichung Spannungsverteilung im Torsionsquerschnitt Torsionsmoment polares Widerstandsmoment Torsionsgleichung
37.5	Auf Abscherung beanspruchte Bauteile erkennen, Bauteile berechnen Scherschneidvorgänge erkennen und berechnen	Spannungsverteilung im Scherquerschnitt Scherkraft Scherspannung Scherschneiden Scherfestigkeit Werkstückabmessung Schneidkräfte
		Streckenlast auf Punktlast reduzieren Ohne Steinerschen Satz Ohne Schubmodul und Widerstandsgleichung

**Statik****Definition, Zweck**

Statik ist die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte in Körpern, die in Ruhe oder konstanter geradliniger Bewegung sind. Ihre Ergebnisse sind Grundlage der Festigkeitsrechnung.

Vereinfachungen für die Schule

- alle Körper sind starr
- Reibung wird meist vernachlässigt
- nur 2D-Probleme (in der Ebene)
- Krafteingriff wird auf Punkte reduziert

Darstellungen von Kräften

Kräfte sind Vektoren und gekennzeichnet durch

- Betrag und
- Richtung (Wirklinie WL und Richtungssinn)

$F=10\text{N}$ nur Betrag ohne Richtungsangabe
zeichnerisch, Betrag wird durch die Länge dargestellt, Richtung durch sich selbst.

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} 3\text{ N} \\ 4\text{ N} \end{bmatrix} = [53,1^\circ; 5\text{ N}]$$

Rechnen mit Kräften in der Statik

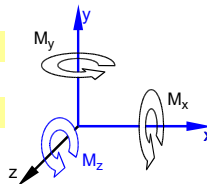
Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt:

Gleichgewichtsbedingungen (allg.)

$$\Sigma F = 0$$

Die Hauptachsen im Raum

(Pfeilrichtung ist +)

**Gleichgewichtsbedingungen 3D/2D**

Aus $F = m \cdot a$ und $a=0$ (Statik!) folgt (2D bzw. 3D):

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \end{aligned}$$

Gelten für jedes Teil und jedes Koordinatensystem.

Aufgabe lösbar in der Ebene?

Für TG liegen alle Kräfte in einer Ebene:

- es gelten 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0; \quad \Sigma M = 0$$

Nur 3 unbekannte Größen (Kraftbeträge, Krafrichtungen, Momente) können gelöst werden.

Wer mehr Unbekannte hat, muss weitere Informationen suchen oder die Aufgabe überspringen

Aufgabe lösbar am Punkt?

Im zentralen KS wirken alle Kräfte durch einen Punkt

- ohne Hebelarme wirken keine (Dreh-)Momente
- es gelten nur noch 2 Gleichungen

$$\Sigma F_x = 0; \quad \Sigma F_y = 0$$

Im zentralen KS sind nur noch 2 Größen lösbar, z.B.

- eine Kraft nach 1 Betrag und 1 Richtung oder
- 2 Kräfte mit bekannter Richtung

Das Reaktionsprinzip und seine Folgen

Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio)

Um mit Kräften rechnen zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen → Freimachen

Vertiefung: keine

FTM, TG-ja; MVK: entfällt

FO Steinmetz-Meisterprüfung, Nürnberg ca. 1570 ([SdW] 11/91)

FO Freiburger Münster [BadZtg] 30.11.2014

1) Welche Fachgebiet muss man heutzutage dazu beherrschen? Statik
Verfahren der Alten: Erfahrung und Ästhetik (=Theorie?) wurden in Regeln umgesetzt.

2) Warum lassen wir am TG die konstante geradlinige Bewegung nicht zur Vereinfachung weg?

Konstante geradlinige Bewegung kann man von Ruhe gar nicht unterscheiden – z.B. fliegen wir ziemlich schnell um die Sonne.

3) Was wird in der Statik betrachtet? Kräfte.

4) Welche Wirkungen haben Kräfte?

Bewegungs- (Thema der Kinetik, wie Statik ein Teilgebiet der Dynamik) oder Formänderungen (meist vernachlässigt): Ideal starre Körper erfahren keine Formänderung durch Kräfte, sodass sich die Kraftangriffspunkte nicht verschieben.

Ursache für Kräfte? $F = m \cdot a$; $F = E \cdot \epsilon$, Reibung (meist vernachlässigt) usw.

5) Was muss man von einer Kraft wissen, wenn man mit ihr rechnen will?

Auf den Tisch setzen ($\approx 1\text{kN}$), Tisch schieben, am Tisch ziehen.

Der Angriffspunkt der Kraft ist zwar auch wichtig, aber keine der Kraft innewohnende Eigenschaft. Wirklinie ist die Verlängerung des Kraftvektors in beiden Richtungen, Richtungssinn ist die Richtung des Kraftvektors auf der WL.

Bedeutung der Kraftwirkung: Man möge versuchen, ein Auto seitwärts anzuschieben.

Müsste genauer $|F| = 10\text{ N}$ heißen! Einheit Newton $[N] = \text{kg} \cdot \text{m} / \text{s}^2$

vektoriell, schließt die Richtung ein

FO Flieger

1) Wie viele unabhängige Richtungen gibt es im Raum (3D)?

2) Welche Richtung entfallen bei Aufgaben in der Ebene (2D)?

3D bedeutet 3 Kräfte und 3 Momente, 2D nur 2 Kräfte und 1 Moment, d.h. die Vereinfachung beträgt 50%.

In der Ebene fallen F_z , M_x und M_y weg: Danach ist die Indizierung von M nicht mehr nötig, weil keine Verwechslungsgefahr mehr besteht.

Dreifingerregel: Koordinatensystem mit Daumen (x-Achse), Zeigefinger (y-Achse) und Mittelfinger (z-Achse) der rechten Hand aufspannen.

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

3) Wie lauten die Gleichgewichtsbedingungen?

Die zeichnerischen Lösungen beruhen auf denselben Gleichgewichtsbedingungen!

Drehen um die Längsachse: Rollen, engl.: roll

Drehen um die Querachse: Nicken, Stampfen, Neigen, früher auch Galoppieren ([SdW] 08/2015 S.111), engl.: pitch

Drehen um die Hochachse: Gieren, engl.: yaw

Im Einzelfall kann es sinnvoll sein, auch andere Kraftrichtungen oder Drehpunkte außerhalb des betrachteten Körpers zu wählen.

4) Wie viele Unbekannte können mit 6/3 Gleichungen gefunden werden?

Mit 3 Gleichungen kann man 3 unbekannte Kräfte ermitteln (statische Bestimmtheit).

Als statisch bestimmtes ebenes System bezeichnet man einen Körper, der so gelagert ist, dass nur drei unbekannte Auflagerreaktionen angreifen.

Beispiel: Eine Lagerung mit Fest- und Loslager ist statisch bestimmt, eine Lagerung mit 2 Festlagern ist überbestimmt.

Statisch überbestimmte System (mehr Auflagerreaktionen möglich) erfordern weitere Gleichungen zur Lösung (z.B. Dehnung durch Kraft oder Wärme bei zwei Festlagern).

Weniger Auflagerreaktionen heißt einfach, dass das Teil lose ist.

Die statische Bestimmtheit muss in jeder Raumrichtung erfüllt sein.

Fundsachen

Deckenlasten: [Schneider21] S.3.22f: Es werden nicht nur Flächenlasten (Schnee, Wind, Lagergut, ...) berücksichtigt, sondern ggf. Faktoren bei Hubschrauberlandeplätzen, Regelbetrieb bei Gegengewichtstaplern, Böengeschwindigkeitsdruck ... S.3.49: Schneelast: Lörrach gehört zur Zone 2 (Hochschwarzwald 2a = höchste Stufe). Formel (A = Geländehöhe in [m]):

$$S_v = 0,25 + 1,91 \cdot \left(\frac{A + 140}{760} \right) \geq 85 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Brücken: [Schneider21] S.3.59: Anpralllasten (Fahrzeuganprall an Brückenpfeiler), S.3.63 Schwingungsbeiwert für Hauptspur.

Erdbeben: [Schneider21] S.3.66f: Lörrach gehört zur höchsten Erdbebenzone 3v

5) Tauziehen mit je 5kN (500kg): Zugkraft im Tau?

Die Zugkraft beträgt 5kN und nicht etwa das Doppelte, denn Kräfte treten IMMER paarweise auf (actio = reactio). Die Kräftepaare addieren sich nicht, sondern heben sich auf, und erfüllen so die Gleichgewichtsbedingung trivial und nutzlos. Um die Gleichgewichtsbedingungen anwenden zu können, muss man die Kräftepaare auftrennen und betrachtet dann alle Kräfte, die von außen auf eine beliebige Baugruppe wirken. Das Verfahren heißt Freimachen und wird unten behandelt.



Statik I: Zentrales Kräftesystem

Kräfte am Punkt zeichnerisch ermitteln

Statik I → Zentrales Kräftesystem → alle Kräfte wirken durch einen Punkt → keine Hebelarme
→ Es treten keine Momente auf → Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ entfällt → nur 2 unbekannte Größen sind lösbar.
[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

Zielgruppe: alle

Angewendet werden die statischen Grundoperationen Parallelogramm, Erweiterungssatz, Verschiebesatz. Die ausgeführten Beispiele stammen aus der ersten Quelle:

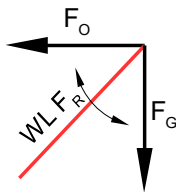
ulrich-rapp.de/stoff/statik/Statik_Ub_zentral.pdf

[Müller-Breslau I] S.1: „Die graphische Statik lehrt die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte auf geometrischem Wege und entwickelt in gleicher Art die Bedingungen, unter denen sich die auf einen Körper wirkenden Kräfte im Gleichgewicht befinden.“

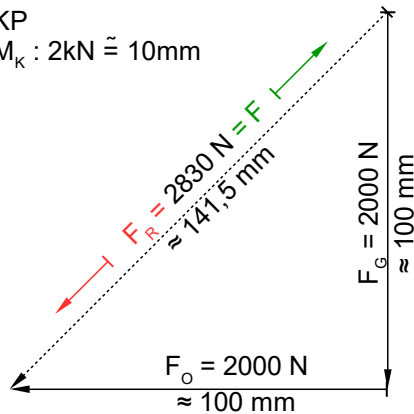
Zusammensetzen von Kräften

TG: Aufg. 1a, Oberleitungsrolle;
MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.]
Aufgabe 29 (Richtung definieren)
LS Seilrolle

LP Seilrolle
 M_L : noch nicht nötig



KP
 M_K : $2\text{ kN} \approx 10\text{ mm}$



Arbeitsplan

0. Lageplanskizze

= Lageplan ohne formelle Regeln
→ hält den Kopf frei für das Problem

1. Lageplan

Geeignete Baugruppe auswählen, nennen und alle auf die Baugruppe wirkenden Kräfte einzeichnen
– Wirklinien winkeltreu
– Richtungen: wie wirkt RdW auf BG
– Angriffspunkte lagetreu (Lagemaßstab): (nur wenn zeichn. Lösungen für das allg. Kräftesystem im Lehrplan stehen)

2. Kräfteplan

Kräfte eintragen
– maßstabsgerecht (Kräftemaßstab)
– hintereinander als Pfeilkette
– winkeltreu (Parallelverschiebung)

3. Resultierende F_R / Gegenkraft F
 F_R (Ersatzkraft) ist die 'Abkürzung im KP' und ersetzt die gegebenen Kräfte
 F schließt das Krafteck und hält die gegebenen Kräfte im Gleichgewicht.

Ausmessen, umrechnen mit M_K .

Plausibilitätsbetrachtung

Welche Kräfte wirken überhaupt?

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 ... 1/3 der Punktzahl. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageplanskizze.

Kräfte eintragen, wo sie wirken.

Der Lageplan ist die zeichnerisch-formale Fassung von "Gegeben und Gesucht".
Im allgemeinen Kräftesystem fließen über den Lagemaßstab der Abstand der Kräfte und damit die Momente ein. Beim zentralen System erübrigt sich das Eintragen der Angriffspunkte, da sie alle an einem Punkt angreifen.
Unbekannte WL können wie gezeigt oder für rechn. Lösungen mit x- und y-Komponenten dargestellt werden.
Richtung: Wie wirkt der Rest der Welt auf die Baugruppe.

Kräfte → geschlossener Linienzug.

Der Kräfteplan ist das Lösungsverfahren und sollte streng vom LP unterschieden werden. Deshalb akzeptiere ich auch keine Parallelogramme, die bei 2 Kräften noch möglich wären. Die Richtungen sollen per Parallelverschiebung übertragen werden, weil es dabei deutlich weniger Fehler gibt.
Die gegebenen Kräfte werden richtungsgemäß und maßstabsgerecht so aneinander gereiht, dass sich ein fortlaufender Kräftezug ergibt. Anfangspunkt und Reihenfolge der Kräfte sind beliebig.

Ob die Resultierende oder die Gegenkraft gefragt ist, hängt von der Aufgabe ab. Beide sind gleich groß, aber entgegengerichtet.
Die Resultierende ist die Kraft, die die gegebenen Kräfte ersetzen kann. Beispiel: Wenn auf ein Fahrzeug Antriebskräfte, Luftwiderstand und Rollreibung wirken, kann man diese zusammenfassen und mit der Resultierenden die Beschleunigung zu ermitteln.

Plausibilität: Kann das stimmen?
Vorher Ergebnis abschätzen und nachher Plausibilitätsbetrachtung gehören zu jeder Aufgabe.

Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM];

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 30ff (30 definiert Winkelangabe)

Zerlegen von Kräften

TG: Aufg. 4a: Eimerziehen2; MVK: [EuroRBM]; FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 40f (L), 44f

LP siehe Aufgabe
KP $M_K = 100\text{ N}$ 100mm

Arbeitsplan

0-3 wie oben (bek. Kräfte addieren)

4. F_R auf 2 Wirklinien verteilen

– WL einer Kraft parallel verschieben durch den Anfang von F_R und
– WL der anderen Kraft parallel verschieben durch den Endpunkt von F_R .
– Die unbekannten Kräfte werden durch den Schnittpunkt begrenzt.
– Richtung der Kräfte einheitlich (mit / gegen Uhrzeigersinn)

Ültg: Aufgabe 3 ist grundsätzlich neu, da nicht eine Kraft gesucht wird, sondern zwei.

Zu diesem Verfahren müssen die Kraftrichtungen bekannt sein. Hinweise auf die Kraftrichtungen hat man bei Seilen, Ketten, Zweigelenkstäben, einwertigen Lagern usw. Wenn die Kraftrichtungen nicht bekannt sind, müssen die Drehmomente eingerechnet werden, dies geschieht zeichnerisch im Schlusslinienverfahren.
Drei und mehr unbekannte Kräfte sind ohne Randbedingungen nicht lösbar.

F_R muss im Kräfteplan nicht eingetragen werden.

Vertiefung

TG: UB Statik zentral; MVK: [EuroRBM];

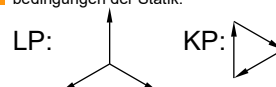
FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 49f.

Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

Der geschlossene Linienzug aller Kräfte ist der graphische Ausdruck der Gleichgewichtsbedingungen der Statik.

Lösungsgedanke bei grafischen Lösungen

Alle Kräfte, die sich im Lageplan in einem Punkt treffen, ergeben im Kräfteplan einen geschlossenen Linienzug.



(Stern ↔ Dreieck ;-)



Kräfte am Punkt berechnen

[Skolaut 2014] S.24: „Ebenes Kräftegleichgewicht am Punkt“

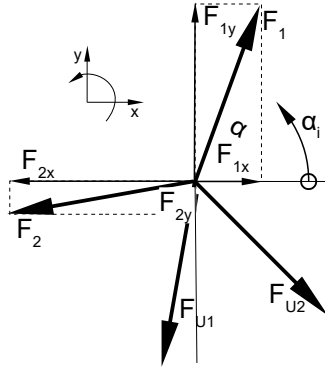
Zusammensetzen – systematische Lsg.

(ohne KP)

TG: FTM; UB Statik zentral 4a: Mobile Antenne; MVK: [EuroRBM]

Geg: F_1 ; F_2 ; Ges.: F_R ; F_3 ; F_4

Lageskizze mobile Antenne



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \cos 70^\circ = 85,51 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 250 \text{ N} \cdot \sin 70^\circ = 234,92 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \cos 190^\circ = -196,96 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 200 \text{ N} \cdot \sin 190^\circ = -34,73 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} = 85,51 \text{ N} + (-196,96 \text{ N}) = -111,45 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} = +234,92 \text{ N} + (-34,73 \text{ N}) = 200,19 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 229,1 \text{ N}$$

$$\alpha'_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{200,19 \text{ N}}{-111,45 \text{ N}} = -60,9^\circ$$

nach links oben

$$\alpha_R = \alpha'_R + 180^\circ = -60,9^\circ + 180^\circ = 119,1^\circ$$

zur +x-Achse

Zerlegen - individuelle Lösung

= Durchwursteln anhand des Kräfteplans

Rechtwinklige Dreiecke

Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Komponenten.

Beliebige Dreiecke

Kräfteplanskizze mit der bekannten Kraft F_R und den Wirklinien der unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2}

Beispiel:

[Böge Aufg.] Aufg. 51

$$F_{U1} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U1}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 15,9^\circ}{\sin 125^\circ} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = F_R \cdot \frac{\sin \beta_{U2}}{\sin \beta_R} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{\sin 39,1^\circ}{\sin 125^\circ} = 176,4 \text{ N}$$

Vertiefung

FTM, MVK: kein Zerlegen. TG: volles Programm

Arbeitsplan:

1. Lageplanskizze
2. Koordinatensystem festlegen
3. Tabelle der Kräfte erstellen

Alle Winkel α von der x-Achse (ccw)!

	F [N]	α [°]	F_x [N]	F_y [N]
F_1	250,0	70,0	85,5	234,9
F_2	200,0	190,0	-197,0	-34,7
F_R	229,1	119,1	-111,5	200,2
F_{U1}	76,6	260,0	-13,3	-75,4
F_{U2}	176,5	-45,0	124,8	-124,8
Kontrolle: $\Sigma =$			0,0	0,0

4. Kräfte in Komponenten zerlegen

Komponenten = Kraftanteile in Koordinatenrichtungen

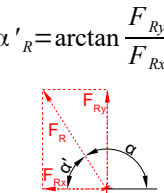
$$F_{nx} = F_n \cos \alpha_n; \quad F_{ny} = F_n \sin \alpha_n$$

5. Komponenten addieren

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots; \quad F_{Ry} = \Sigma F_{ny}$$

6. Betrag $|F_R|$ der Resultierenden

$$|F_R| = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

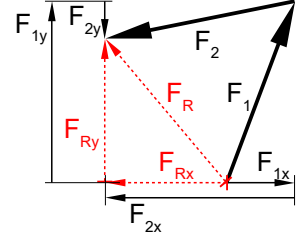
7. Richtung α_R der Resultierendenarctan liefert zwei-deutige Werte $\rightarrow$ Winkel muss präzisiert werden:– Vorzeichen der Komponenten $\rightarrow$ Skizze !!
oder– α ab +x-Achse angebenFür $F_{Rx} \geq 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R$ Für $F_{Rx} < 0$ gilt: $\alpha_R = \alpha'_R + 180^\circ$ 

Dieser programmierfähige Algorithmus spart fehlerträchtige Überlegungen und übt alle nötigen Techniken ein:

6) Freimachen

Freimachen ist bei allen Statikaufgaben unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine Skizze. [Gross 2015] S.2 verwendet den Begriff Freikörperbild statt Lageskizze.

7) Komponenten

Skizze: Die Komponenten von F_R setzen sich aus den Komponenten der gegebenen Kräfte zusammen.

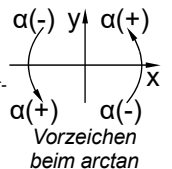
8) Winkelangaben

Alle Winkel α ccw (= counter clock wise = gegen den Uhrzeigersinn) von derselben (x-)Achse $\rightarrow$ Vorzeichen der Komponenten ergeben sich automatisch $\rightarrow$ weniger Fehler.

Für die Zerlegung in Komponenten muss man genau einmal überlegen, ob man sin oder cos einsetzen muss, danach läuft alles automatisch. Alle x-Komponenten erhalten das eine, alle y-Komponenten das andere. Die Vorzeichen der Komponenten ergeben sich wegen des einheitlichen Bezuges der Winkel auf die x-Achse automatisch.

Komponenten addieren ergibt die Komponenten der Resultierenden F_R . F_n meint den Betrag der n-ten Kraft α ist der Winkel von der x-Achse gegen den Uhrzeiger bis zur Kraft. Vorzeichen von F_{ny} ergeben sich automatisch.

Betrag mit Pythagoras aus den Komponenten berechnen.

Die genaue Richtung α_R bekommt man mit den Komponenten F_{Rx} und F_{Ry} heraus, da rentiert sich kein Algorithmus. Statt Regeln auswendig zu lernen, sollte man das Problem erkennen und nach Plausibilität lösen.– α ab +x-Achse angebenWenn $F_{Rx} \geq 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der +x-AchseWenn $F_{Rx} < 0 \rightarrow \alpha_R$ zählt ab der -x-Achse

Für einfache Aufgaben braucht man keinen komplizierten Algorithmus. Oft genügt es, den Kräfteplan zu skizzieren und dann die gesuchten Kräfte mit ein paar Winkelfunktionen zu berechnen. Für individuelle Lösungen muss der Arbeitsplan zwangsläufig sehr allgemein gehalten sein

Das Zerlegen in rechtwinklig zueinander stehende Kräfte ist häufig notwendig und muss von jedem Schüler beherrscht werden.

Skizze mit Werten der Beispielaufgabe

Winkel für das Beispiel:

$$\beta_{U1} = 180^\circ - \alpha_R + \alpha_{U2} = 180^\circ - 119,1^\circ - 45^\circ = 15,9^\circ$$

$$\beta_{U2} = \alpha_R - (\alpha_{U2} - 180^\circ) = 119,1^\circ - (260^\circ - 180^\circ) = 39,1^\circ$$

$$\beta_R = (\alpha_{U1} - 180^\circ) - \alpha_{U2} = (260^\circ - 180^\circ) - (-45^\circ) = 125^\circ$$

$$\text{Kontrolle: } 15,9^\circ + 39,1^\circ + 125^\circ = 180^\circ$$

Auch die Berechnung der Innenwinkel kann man automatisieren, aber der Aufwand lohnt sich nicht ggü. einer individuellen Lösung. Im Fall der Fälle müssen die Kräfteplanskizze und ein paar Überlegungen genügen.

TG: UB Statik zentral, MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufg. 51f

Statik_TA_zentral-rechnerisch.odt
Seitenumbruch



Systematische Lösung – Zerlegen

$$\Sigma F_x = 0 = F_{Rx} + F_{U1x} + F_{U2x} = F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1} + F_{U2} \cdot \cos \alpha_{U2}$$

$$\rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}}$$

$$\Sigma F_y = 0 = F_{Ry} + F_{U1y} + F_{U2y} = \dots \rightarrow F_{U2} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{F_{Rx} + F_{U1} \cdot \cos \alpha_{U1}}{-\cos \alpha_{U2}} = \frac{F_{Ry} + F_{U1} \cdot \sin \alpha_{U1}}{-\sin \alpha_{U2}} \rightarrow$$

$$F_{U1} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U2} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U2}}{\cos \alpha_{U1} \cdot \sin \alpha_{U2} - \sin \alpha_{U1} \cdot \cos \alpha_{U2}}$$

$$F_{U2} = \frac{-F_{Rx} \cdot \sin \alpha_{U1} + F_{Ry} \cdot \cos \alpha_{U1}}{\cos \alpha_{U2} \cdot \sin \alpha_{U1} - \sin \alpha_{U2} \cdot \cos \alpha_{U1}}$$

$$F_{U1} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin(-45^\circ) + \sin 119,1^\circ \cdot \cos(-45^\circ)}{\cos 260^\circ \cdot \sin(-45^\circ) - \sin 260^\circ \cdot \cos(-45^\circ)} = 76,6 \text{ N}$$

$$F_{U2} = 229,1 \text{ N} \cdot \frac{-\cos 119,1^\circ \cdot \sin 260^\circ + \sin 119,1^\circ \cdot \cos 260^\circ}{\cos(-45^\circ) \cdot \sin 260^\circ - \sin(-45^\circ) \cdot \cos 260^\circ} = 176,5 \text{ N}$$

gerechnete Beispiele

[Böge Aufg.] Aufg. 51

Zusammensetzen

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \cos 35^\circ = 262,1 \text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin \alpha_1 = 320 \text{ N} \cdot \sin 35^\circ = 183,5 \text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \cos 55^\circ = 103,2 \text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin \alpha_2 = 180 \text{ N} \cdot \sin 55^\circ = 147,4 \text{ N}$$

$$F_{3x} = F_3 \cdot \cos \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \cos 160^\circ = -234,9 \text{ N}$$

$$F_{3y} = F_3 \cdot \sin \alpha_3 = 250 \text{ N} \cdot \sin 160^\circ = 85,5 \text{ N}$$

$$F_{Rx} = +F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 262,1 \text{ N} + 103,2 \text{ N} - 234,9 \text{ N} = 130,4 \text{ N}$$

$$F_{Ry} = +F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 183,5 \text{ N} + 147,4 \text{ N} + 85,5 \text{ N} = 416,4 \text{ N}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = 436,3 \text{ N}$$

$$= \sqrt{(130,4 \text{ N})^2 + (416,4 \text{ N})^2}$$

$$\alpha_R = \arctan \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} = \arctan \frac{416,4 \text{ N}}{130,4 \text{ N}} = 72,6^\circ$$

zur positiven x – Achse (nach rechts oben)

FTM, MVK: kein Zerlegen, TG: nur Ergebnis

Die Herleitung der Formel ist ggü. der Lösung mit Sinussatz zu aufwendig, das Auswendiglernen der Formel nicht sinnvoll → individuelle Lösung mit Sinussatz bevorzugen

1) Herleitung

8. Kräftegleichgewichte $\Sigma F_x = 0$ und $\Sigma F_y = 0$

und die unbekannten Kräfte F_{U1} und F_{U2} per Gleichungssystem lösen

2) F_{U2} analog herleiten oder Symmetrie nutzen

3) Allgemeine Formel

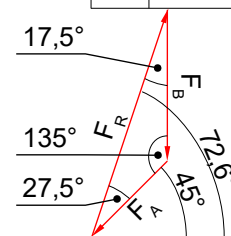
4) Man beachte die Symmetrie der Gleichungen, die mehrfach nützlich sein kann:

- Kontrollmöglichkeit
- Analogieschlüsse
- Ästhetik / Spass an Mathe vermitteln

5) Beispiel: Mobile Antenne

Zerlegen

	$ F $	α	F_x	F_y
F_1	320N	35°	262,1N	183,5N
F_2	180N	55°	103,2N	147,4N
F_3	250N	160°	-234,9N	85,5N
F_R	436,3N	$72,6^\circ$	130,4N	416,4N
F_A	184,5N	225°	-130,4N	-130,4N
F_B	286,0N	270°	0	-286,0N



$$F_A = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_A}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 17,4^\circ}{\sin 135^\circ} = 185 \text{ N}$$

$$F_B = F_R \cdot \frac{\sin \alpha_B}{\sin \alpha_R} = 436,6 \text{ N} \cdot \frac{\sin 27,6^\circ}{\sin 135^\circ} = 286 \text{ N}$$

**Freimachen von Körpern**

= Bauteile durch Kräfte ersetzen

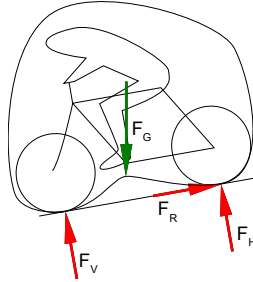
Zweck

- Erkennen aller Kräfte an einer BG
- Voraussetzung für alle Lösungen in der Statik

z.B. tgme HP92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad + FahrerIn

Ges.: Aufstandskräfte



FTM, TG: Erarbeiten anhand der Übungen; MVK: entfällt

"Freimachen" ist das geistig anspruchsvollste Thema, das Technik M am TG zu bieten hat; gleichzeitig ist es die Grundlage zum Lösen von Statikaufgaben. Wer nicht richtig freimacht, braucht gar nicht anfangen zu rechnen... Im zentralen Kräftesystem sind die Aufgaben meist so einfach gestrickt, dass das Freimachen intuitiv möglich ist und seine Bedeutung nicht klar wird. Deshalb führe ich diese Einheit erst danach durch und vertiefe es in den Übungen zum allgemeinen KS. Meine Vorgehensweise: Kurz die Regeln anhand eines Beispiels erklären, dann drillmäßiges Üben

[Skolaut 2014] S.8, S.28: verwendet die Begriffe „Freischneiden“ und „Freikörperbild“, letzteres neben Kräften auch mit Maßen u.ä.

1) Im System Rad+FahrerIn findet man zahlreiche Kräfte und Gegenkräfte (Kräftepaare):

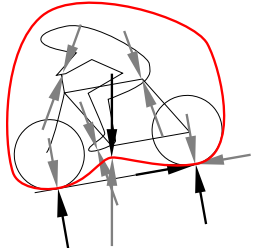
Rad drückt gegen Straße und zurück, vorne wie hinten, Reibung vs. Antriebskraft, Hände vs. Lenker, Gesäß vs. Sattel, Erde zieht an Rad+Fahrer und umgekehrt, u.v.a.m.

2) Was kann man damit anfangen?

Nix! Die An/Unzahl der Kräfte ist unhandlich und Kräftepaare, die sich per se aufheben, bieten keinen Ansatz für die Gleichgewichtsbedingungen.

3) Gesucht ist ein Verfahren, um die Kräftepaare zu reduzieren und aufzusprengen

→ Freimachen: Man entscheidet sich für eine BG und zieht einen symbolischen Kringel darum. Reduktion: Alle Kräftepaare, die innerhalb oder außerhalb des Kringels liegen, werden ignoriert. Fraktion: Von den Kräftepaaren, die an der Grenze der BG liegen bzw. von der Systemgrenze zerschnitten werden, betrachtet man nur die Kräfte, die von außen auf die BG wirken.



[Böge, Techn. Mechanik] einarbeiten,

Vorgehensweise**1. Baugruppe wählen**

- Geeignete BG grenzen an gesuchte Kräfte

2. Alle Kräfte eintragen

- An jedem Kontakt zw. der BG und dem Rest der Welt
- $\perp$ rechtwinklig zur Berührfläche (Normalkraft) bzw. $\parallel$ parallel zur Berührfläche (Reibung)
- Gravitation (Gewichtskräfte)

3. Bekannte Kräfte mit Richtung

- Richtungskonvention: Wie wirkt der RdW auf die BG?

4. Unbekannte Kräfte

- Einwertiges Lager: Richtung annehmen
- Zweiwertiges L.: 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x , F_y)

5. Lösbarkeit prüfen

- Lösbar sind max. als 3 unbekannte Größen (Beträge und/ oder Richtungen von Kräften).

Wer zu viele Unbekannte hat, muss Infos suchen:

6. Lageplanskizze anfertigen

- LS dokumentiert die Überlegungen

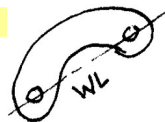
Hinweise auf Richtungen von Kräften

Seile, Ketten usw.

übertragen nur Zugkräfte in Seilrichtung

Zweigelenkstäbe (Pendelstützen)

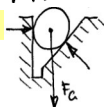
= an 2 Stellen drehbar gelagert
übertragen Zug- oder Druckkräfte nur in der Verbindungslinie der Gelenkpunkte.
z.B. Kolben, Gitterstäbe

**Berührflächen**

übertragen Normalkräfte senkrecht und Reibkräfte parallel zur Berührfläche.

**Rollkörper**

Normalkräfte bei Rollkörper (Kugeln, Rollen) gehen durch ihren Mittelpunkt.



Im Prinzip muss man nur die gesuchten Kräfte eintragen und hat schon einen Teil der Grenze der geeigneten Baugruppe. Auf die BG dürfen beliebig viele bekannte Kräfte wirken. Sonstige Kräfte möglich (Schule nur im Einzelfall), sie zählen aber zu den unbekannten Kräften.

Gewichts- und Reibungskräfte werden berücksichtigt, wenn es verlangt wird.

Vom freizumachenden Körper werden alle Berührstellen entfernt und durch die zugehörigen Kräfte ersetzt. Am Besten denkt man sich eine Linie um die gewählte Baugruppe und sucht alle Kräfte, die diese Linie überschreiten.

Schüler setzen Kräfte oft nach Wunschdenken ein, z.B. "da brauche ich noch eine Kraft" oder auf Verdacht "Da bewegt sich was". Das führt zu vielen Fehlern.

Mit der Vorzeichenregel „Wie wirkt der Rest der Welt (RdW) auf die Baugruppe (BG)“ wirken Schwerkraft nach unten. Es käme auch zu richtigen Ergebnissen, trüge man ALLE Richtungen „falsch“ herum ein (Schwerkraft nach oben!), aber Mischen der Richtungssysteme funktioniert nie.

Bei zeichnerischen Lösungen muss man keine Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen, es genügen die WL. Bei rechnerischen Lösungen sind die Richtungen nötig für die Vorzeichen in den Gleichungen. Wenn man eine Richtung „falsch“ angenommen hat, wird das Ergebnis negativ und es stimmt wieder.

Es sind nur 3 unbekannte Kräfte lösbar, weil nur drei Gleichgewichtsbedingungen existieren. Die Anzahl der lösbaren Unbekannten reduzieren sich, wenn nicht alle Gleichungen angewendet werden können, z.B. beim zentralen Kräftesystem (kein Momentengleichgewicht) oder wenn alle Kräfte parallel sind (Kräftegleichgewicht nur in einer Richtung). Wenn man mehr unbekannte Kräfte findet als lösbar sind, muss man weitere Informationen suchen. Ein Lösungsversuch ohne zusätzliche Infos ist sinnlos.

Das Freimachen ist oft der schwierigste Teil einer Statikaufgabe, deshalb gebe ich für eine lesbare LS bereits 1/4 bis 1/3 der Punkte. Umgekehrt gibt es ohne LS nie die volle Punktzahl.

Lösungen in der Statik sind komplex und die Fehlerquote steigt stark an, wenn man wesentliche Lösungsschritte im Kopf jongliert → LS liegt im Eigeninteresse des Schülers.

Kein TA, nur beiläufig einließen lassen

Gemeinsame Wirkungslinie ist notwendig in der Definition, damit auch gebogenen Teile als Pendelstützen gesehen werden können. Die Form der Pendelstütze spielt keine Rolle.

Wenn die Reibung berücksichtigt werden muss, ist sie gegen die Bewegungsrichtung einzu- tragen. Die Haftreibung $F_R = \mu \cdot F_N$ ist nicht die tatsächliche Reibkraft, sondern ihr höchstmöglicher Wert. Deshalb ist die Reibkraft in aller Regel unbekannt. Meist wird die Reibung vernachlässigt.

Für die Rollreibung im Ruhezustand gilt dasselbe wie für die Haftreibung oben.

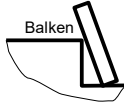
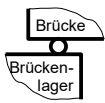
Verschiebesatz: Wenn über eine Rolle ein Seil gelegt ist, das in beide Richtungen gleich stark zieht, spielt ihr Durchmesser „keine Rolle“.

**Lose und feste Lager**

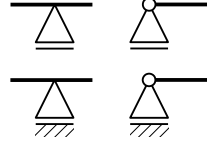
sind in allen Richtungen (F_x , F_y , F_z , M_x , M_y , M_z) außer einer, zwei, drei beweglich:

Einwertige Lager (Loslager)

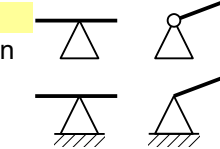
sind in allen Richtungen außer einer beweglich.
konstruktive Beispiele



Symbole:

**Zweiwertige Lager (Festlager)**

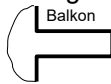
sind in allen Richtungen außer zweien beweglich.



FO Brückenlager

Dreiwertige Lager

sind in allen Richtungen fest.

**Vertiefung**

FTM, TG: AB Statik_Ub_Abi ([Böge Aufg.] Aufgabe 9..28 sind zu leicht)



Statik II: Allgemeines Kräftesystem

3-Kräfteverfahren

Anwendung:

3 nicht parallele Kräfte

Gesucht: 1x WL und 2x Betrag.

1 bekannte Kraft

+ 1 (un-)bekannte Kraft mit WL

+ 1 unbekannte Kraft ohne WL

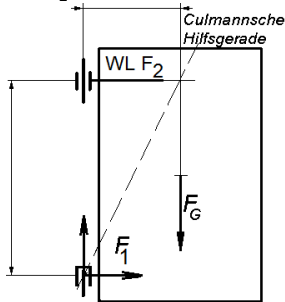
Arbeitsplan

0. Lageplanskizze

siehe Lageplan, im Lageplan kann man Schranie und Türe weglassen

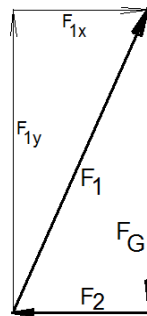
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



nur TGT

1) Welche Kräfte wirken auf die Scharniere der Klassenzimmertür

Schüler sollen die Kräfte in den Scharnieren einer Tür bestimmen. Maße schätzen oder mit Tafellineal messen.

2) Freimachen der Türe (Lageplan)

3) Der Lagemaßstab bringt die Abstände zwischen den Kräften in die Lösung

4) Kräfteplan

5) Anschließend Überschriften einsetzen.

Welche Kräfte wirken überhaupt ?

Die LP-Skizze ist ein Entwurf des LP und an keine Form gebunden. Sie ist keine Pflicht, aber empfehlenswert, denn beim Skizzieren kann man die Aufgabe erfassen ohne sich mit Formalien zu belasten. Ich gebe für eine verständliche Skizze ca. 1/4 der Punktzahl.

Schnittpunkt im LP = geschlossenes Polygon im KP

Lösungsgedanke

Das Türblatt muss seine Gewichtskraft auf eines (I) der beiden Scharniere (oben oder unten) senkrecht abstützen. Hier wurde das untere Scharnier gewählt, mit dem oberen funktioniert es sinngemäß. Die Kraft F_1 , mit der das untere Scharnier auf die Tür wirkt, ist in Betrag und Richtung zunächst unbekannt, dies wird im LP mit der Darstellung ihrer Komponenten F_{1x} und F_{1y} angedeutet. Wie alle Kräfte in der Statik darf man auch die beiden anderen Kräfte F_2 und F_G auf ihren Wirklinien verschieben bis zu deren Schnittpunkt und dort durch ihre Resultierende F_R ersetzen. Die Resultierende F_R und F_1 müssen sich aufheben (actio = reactio), weil sonst das Türblatt nicht im Gleichgewicht ist. Aufheben können sich die Resultierende und F_1 aber nur, wenn sie auf einer gemeinsamen Wirklinie liegen. Folglich bildet die Linie zwischen dem unteren Scharnier und dem Schnittpunkt aus F_G und F_2 die Wirklinie von F_1 . Damit schneiden sich alle 3 Kräfte in einem Punkt und die Aufgabe kann mit den Mitteln der zentralen Statik gelöst werden.

Karl Culmann (*1821 - †1881) war Bauingenieur, Professor an der ETH Zürich und Verfasser von „Die graphische Statik“ (→ [Culmann 1866]).

Übungen

4-Kräfteverfahren

Anwendung:

4 Kräfte, alle WL bekannt, max. paarweise parallel

1 bekannte Kräfte

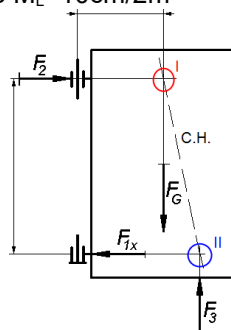
+ 3 (un-)bekannte Kräfte mit WL

Gesucht: 3x Betrag der Kraft

Arbeitsplan

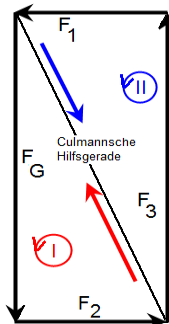
1. Lageplan

Türe $M_L = 10\text{cm}/2\text{m}$



2. Kräfteplan

$M_K = F_G / 10\text{cm}$



Die farbige Markierungen dienen der Erklärung und sind zur Lösung nicht erforderlich, auch nicht in s/w.

AB Statik_Ub_Abi:

1.1 HP94/95-2 Bohrmaschinenständer 1.1, 2.1 HP93/94-2 Zweigelenkarm, 3.1 HP95/96-1 Garagentransporter, 5.2 HP91/92-1 Parklift, 6.2 HP98/99-1 Lkw, [Böge Aufg.] Aufgaben 83ff "3-Kräfte-Verfahren"

AM Keil

1) Neue Situation: Die Türe wird mit einem Keil angehoben, bis die Angeln vom Gewicht der Türe entlastet sind.

Anwendung:

F_1 : Betrag und Richtung bekannt

F_2, F_3, F_4 : Betrag unbekannt, Richtung bekannt

2) 0. Lageplanskizze wird nicht mehr gesondert erwähnt

3) Keil außerhalb des Schwerpunktes ansetzen und vom Lageplan im 3-Kräfteverfahren ausgehen: die Schüler müssen selbst merken, dass die waagerechten Kräfte die Richtung tauschen.

Lösungsgedanke

Bei 4 Kräften, davon 3 Unbekannten, werden zwei Kräftepaare zusammengefasst und jeweils durch ihr F_R ersetzt. Damit dies momentenfrei gelingt, muss die Wirklinie jeder F_R durch den Schnittpunkt ihres Kräftepaars verlaufen. Damit sich die beiden F_R aufheben können, müssen sie eine gemeinsame Wirklinie haben, also durch die beiden Schnittpunkte der beiden Kräftepaare verlaufen (Culmann'sche Hilfsgerade C.H.). Man kann die Culmann'sche Hilfsgerade als ein internes Kräftepaar (KP: roter und blauer Pfeil, actio und reactio) betrachten, das in den Schnittpunkten I und II (rot und blau) hilft, das Gleichgewicht zu halten, sich aber wie jedes interne Kräftepaar selbst aufhebt. Da C.H. bei der Türe eine Druckkraft ist, können könnte man die Tür rechtwinklig zur C.H. durchsägen (Vergleiche [EuroRBM] Aufgabe "Keilspanner").

Hinweise zur Konstruktion

Man beginnt mit dem Schnittpunkt I (roter Kreis), weil dort die bekannte Kraft (F_G) liegt, und zerlegt im KP die Kraft F_G in die Kraft F_2 und die gedachte Kraft C.H. mithilfe ihrer Wirklinien. Es ergibt sich das Kräftepaar links unten (roter Kreis). Jetzt kennt man auch im Schnittpunkt II (blauer Kreis) eine Kraft, nämlich die gedachte Kraft C.H., die man in die Kräfte F_1 und F_3 zerlegt. Genau gedacht ist C.H. ein internes Kräftepaar, das in einem Schnittpunkt entgegengesetzt zum anderen wirkt (roter und blauer Pfeil). Man erkennt, dass dadurch im KP für jeden Schnittpunkt ein geschlossenes Kräftepaar entsteht und sich gleichzeitig das gedachte interne Kräftepaar C.H. wieder aufhebt, wie es sich für ein bloßes Hilfsmittel zur Konstruktion des Kräfteplanes gehört.

Übungen

AB Statik_Ub_Abi:

7.1 HP1998/99-2 Zugmaschine mit Anhänger, 5.1 HP1991/92-1 Parklift (Bremskraft und Aufstandskraft getrennt betrachten), 9.1 HP1992/93-1 Mountainbike (Gewichtskraft des Rades vernachlässigen), HP1986/87-2 Stirnkipper. Hinweis: 4-Kräfte-Aufgaben sind selten! [Böge Aufg.] Aufgaben 117ff "4-Kräfte-Verfahren"

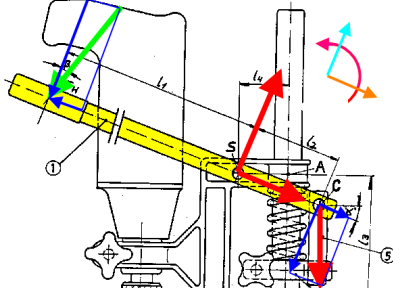


Auflagerkräfte in der Ebene berechnen

Das grafische Schlusslinienvorgehen löst Aufgaben mit komplizierter Bemaßung leichter (→ HP 98/99-2 Zugmaschine mit Anhänger), steht aber nicht mehr im Lehrplan. rechnerische Verfahren sind flexibler, z.B. "Ab welchem .. kippt.."
[Skolaut 2014] S.26: „Statisches Gleichgewicht am ebenen starren Körper“ → die Einschränkungen statisch, eben und starr erfolgten schon bei der Einführung.

TG: HP 94/95-1 Bohrmaschinenständer

Lageskizze Hebel



Im Beispiel kann der Drehpunkt in den Bolzen S oder C liegen. Hier wird S gewählt, da von dort die Bemaßung ausgeht und dies die Rechnung ein wenig erleichtert.

$$\sum M_S = 0$$

$$= 0 = F_{Hy} \cdot l_1 - F_{Cy} \cdot l_2 \rightarrow$$

$$F_C = F_{Hy} \cdot \frac{l_1}{l_2 \cdot \cos \alpha} = 98,48 \text{ N} \cdot \frac{300 \text{ mm}}{90 \text{ mm} \cdot \cos 20^\circ}$$

$$F_C = 349,3 \text{ N}$$

4) Hebelarme und Drehrichtung vertiefen

Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

Im Beispiel bekommt man den Hebelarm zu F_H zwar noch relativ leicht, aber ich will das übertragbare Verfahren zeigen.

$$F_{Hx} = F_H \cdot \sin \beta = 100 \text{ N} \cdot \sin 10^\circ = 17,36 \text{ N}$$

$$F_{Hy} = F_H \cdot \cos \beta = 100 \text{ N} \cdot \cos 10^\circ = 98,48 \text{ N}$$

5) Sorgfältig auf die Vorzeichen eingehen. Jede der 3 GG-Bedingungen gehört zu einer der 3 Koordinatenrichtungen.

$$\sum F_x = 0$$

$$= 0 = -F_{Hx} + F_{Sx} + F_{Cx} \rightarrow$$

$$F_{Sx} = F_{Hx} - F_{Cx} \sin \alpha$$

$$F_{Sx} = 98,48 \text{ N} - 349,3 \text{ N} \cdot \sin 20^\circ = -102,1 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$= 0 = -F_{Hy} + F_{Sy} - F_{Cy} \rightarrow$$

$$F_{Sy} = F_{Hy} + F_{Cy} \cos \alpha$$

$$= 17,36 + 349,3 \text{ N} \cdot \cos 20^\circ$$

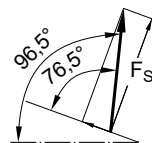
$$F_{Sy} = 426,7 \text{ N}$$

Wenn es ein Festlager gibt:

$$F_S = \sqrt{F_{Sx}^2 + F_{Sy}^2} = \sqrt{(-102,1 \text{ N})^2 + (426,7 \text{ N})^2}$$

$$F_S = 438,7 \text{ N}$$

$$\gamma_S = \arctan \frac{F_{Sy}}{F_{Sx}} = \arctan \frac{426,7 \text{ N}}{-102,1 \text{ N}} = -76,5^\circ$$



Vertiefung

Arbeitsplan

1. Freimachen + Lageskizze erstellen

- Baugruppe wählen (s.o.) und benennen
- alle Kräfte eintragen (s.o.)

2. Richtungen für unbekannte Kräfte annehmen (s.o.)

- für das Vorzeichen in Rechnungen
- „falsche“ Annahme → negatives Ergebnis → stimmt wieder!
- für zweiwertige Lager 2 Richtungen eintragen (z.B. F_x, F_y)

3. Gleichgewichtsbedingungen ansetzen + Gleichungssystem lösen

$$\sum M = 0 \quad \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

mögliche Vereinfachungen

4. Momentengleichgewicht $\sum M = 0$

- Drehpunkt im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte
- eine Gleichung mit 1 Unbekannten = sofort lösbar.

– Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft $\perp$ Hebelarm)

Der Hebelarm ist der kürzeste Abstand zw. Drehpunkt und Wirklinie

5 Kräfte in Bemaßungsrichtung zerlegen

- Nicht Hebelarme berechnen,
- sondern Kräfte rechtwinklig zur Bemaßung zerlegen

– Hilfe: Koordinatensystem in Richtung der Bemaßung legen

- Man kann für jede Kraft ein eigenes Koordinatensystem wählen, z.B. Aufg. 4: Hebebühne
- im tatsächlichen Angriffspunkt →

6. Kräftegleichgewichte $\sum F_x = 0$ und $\sum F_y = 0$

- beliebige Reihenfolge

$\sum F_x = 0$: In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme. Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.
 $\sum F_y = 0$: Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (blau) wirkt.

7. ggf. zusätzliche Gleichungen

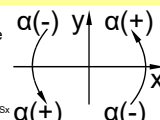
- Für jede Unbekannte eine Glchg.
- im Abi selten, z.B. HP1983/84-2 Hebestation

8. Gleichungssystem lösen

- per Hand oder CAS

9. Betrag und Richtung ermitteln

Achtung: arctan ergibt kein eindeutiges Ergebnis für α (Zählrichtung von α siehe rechts), deshalb muss man den Winkel mit einer Skizze deutlich machen.



Dazu skizziert man die Komponenten F_{Sx} ($\approx -100\text{N}$) und F_{Sy} ($\approx +400\text{N}$) in das gewählte Koordinatensystem und überlegt dann, wo der berechnete Winkel liegt.

10. Plausibilität prüfen

Kompliziertere Aufgaben:
tgme HP1983/84-2 Hebestation
tgme NP201112-5 Salzklappe

- Für alle Probleme der Statik ist Freimachen unverzichtbar. Zur Dokumentation genügt eine unmaßstäbliche Skizze.
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Ich lege Wert darauf, dass die gewählte Baugruppe benannt wird, a) damit ich weiß, welche BG eine Schülerin meint, und b) damit sie es auch weiß :-)
- Details siehe Unterrichtseinheit "Freimachen"
- Man muss die Richtungen nicht kennen, sondern nur annehmen und kennzeichnen. Wenn die Richtung "falsch" angenommen wurde, wird das Ergebnis der Rechnung negativ und stimmt wieder. Es ist auch nicht sinnvoll, die "falsche" Richtungen nachträglich zu korrigieren, weil man dabei die ganze Rechnung korrigieren müsste. Wer sicher gehen will, vermerkt am negativen Ergebnis: „Kraft wirkt entgegen der Annahme.“
- In zweiwertigen Lagern (=Festlager) trägt man für unbekannte Kräfte die Komponenten in x- und y-Richtung ein.

Tipp 1: Wahl des Drehpunktes

Idee: Wenn man den Drehpunkt für die Gleichung $\sum M = 0$ im Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte wählt, haben diese Kräfte den Hebelarm 0 und fallen aus der Gleichung. Es bleibt also nur 1 Unbekannte → manuell leicht zu lösen.
Mit CAS ist dieser Schritt verzichtbar.

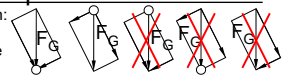
Sonstiges: Einen solchen Schnittpunkt gibt es immer, da Aufgaben mit 3 parallelen unbekannten Kräften nicht lösbar sind. Bisher waren in den Abi-Aufgaben diese Schnittpunkte immer bemaßt. Wenn dies nicht Fall sein sollte (z.B. [Böge Aufg.] Aufg. 120; 129), muss man die Maße zum Schnittpunkt ermitteln oder das Gleichungssystem individuell lösen. Nicht von Kraft mal Länge o.s.ä. reden, da dies leicht mit der Arbeit verwechselt wird, aber dort sind Kraft und Weg parallel.

Tipp 2: Komponenten statt Hebelarm

Idee: Zur Berechnung der Momente müssen Kraft und Hebelarm rechtwinklig zueinander stehen. Wenn dies durch die Bemaßung nicht gegeben ist, können die Hebelarme zwar berechnet werden, aber das funktioniert in jeder Aufgabe anders, ist deshalb fehleranfällig und nur in einfachen Fällen sinnvoll. Meist ist es einfacher, die Kräfte in Bemaßungsrichtung zu zerlegen und die Komponenten mit den gegebenen Längen zu multiplizieren – das Verfahren funktioniert immer gleich und kann eingeübt werden. Zwanglos funktioniert es, wenn man das Koordinatensystem in Bemaßungsrichtung legt.

Tipp 3: Kraftkomponenten skizzieren

Es sind oft Kleinigkeiten:



Kräfte im Angriffspunkt zerlegen, damit man die Hebelarme, nicht verwechselt

Man könnte noch einmal $\sum M = 0$ mit einem anderem Drehpunkt ansetzen, aber $\sum F = 0$ ist weniger aufwändig.

Vorzeichenregel: Es bekommen die Kräfte ein negatives Vorzeichen, deren angenommen Richtung entgegen den Koordinatenrichtungen x bzw. y wirken. Achtung: Diese Vorzeichen sind nicht die Vorzeichen des Momentengleichgewichts.

Plausibilität: Ist es plausibel, dass in F_C und F_S ca. 4x größer als F_H sind?

[Böge Aufg.] Aufg. 120; 119c
Fachwerke ([Böge Aufg.] Aufg. 69ff) können vorläufig gelöst werden, indem man sich von Knoten zu Knoten hangelt. Sobald das allgemeine Kräftesystem behandelt ist, kann das Rittersche Schnittverfahren verwendet werden.

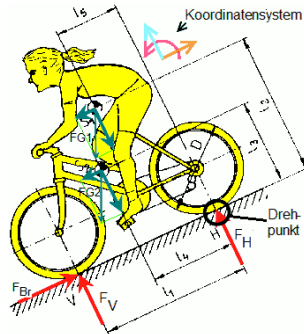


Übungen

Beispiel: schiefe Ebene

z.B. HP 92/93-1 Mountainbike

Lageskizze Rad+Fahrerin



$$F_{Gl_x} = F_{Gl} \cdot \sin \alpha = 560 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 151,0 \text{ N}$$

$$F_{Gl_y} = F_{Gl} \cdot \cos \alpha = 560 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 539,3 \text{ N}$$

$$F_{G2_x} = F_{G2} \cdot \sin \alpha = 140 \text{ N} \cdot \sin 15,6^\circ = 37,7 \text{ N}$$

$$F_{G2_y} = F_{G2} \cdot \cos \alpha = 140 \text{ N} \cdot \cos 15,6^\circ = 134,8 \text{ N}$$

$$\text{mit } \alpha = \arctan 28\% = 15,6^\circ$$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft $\perp$ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\Sigma M_H = 0$$

$$= \pm F_{Br} \cdot 0 - F_V \cdot l_1 \pm F_H \cdot 0$$

$$+ F_{Gl_x} \cdot l_2 + F_{Gl_y} \cdot l_3 + F_{G2_x} \cdot l_3 + F_{G2_y} \cdot l_4 \rightarrow$$

$$F_V = \frac{F_{Gl_x} \cdot l_2 + F_{Gl_y} \cdot l_3 + F_{G2_x} \cdot l_3 + F_{G2_y} \cdot l_4}{l_1}$$

$$F_V = \frac{151,0 \cdot 1000 + 539,3 \cdot 426 + 37,7 \cdot 640 + 134,8 \cdot 575}{1044} \frac{\text{N} \cdot \text{mm}}{\text{mm}}$$

$$F_V = 462 \text{ N}$$

In Kräftegleichgewichten gibt es keine Hebelarme.
Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der x-Achse des Koordinatensystems (siehe oranges Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$= + F_{Br} - F_{Gl_x} - F_{G2_x} \rightarrow$$

$$F_{Br} = F_{Gl_x} + F_{G2_x}$$

$$= 151,0 \text{ N} + 37,7 \text{ N} = 189 \text{ N}$$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn eine Kraft in Richtung der y-Achse des Koordinatensystems (siehe blaues Symbol) wirkt.

$$\Sigma F_y = 0$$

$$= F_V - F_{Gl_y} - F_{G2_y} + F_H \rightarrow$$

$$F_H = -F_V + F_{Gl_y} + F_{G2_y}$$

$$= -462,0 \text{ N} + 539,3 \text{ N} + 134,8 \text{ N}$$

$$= 212 \text{ N}$$

Beispiel: mit Zusammensetzen

Beispiel: HP 83/84-2 Hebestation

Beispiel Kippaufgabe

FTM

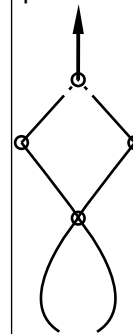
72-82: Resultierende mit Abstand weglassen

83-97: Lagerkräfte (einstufig)

98ff Lagerkräfte (mehrstufig)

Warum Algorithmen? Die Stärke des Menschen ist es eigentlich, sich auf **neue** Probleme einzustellen, während wiederkehrende Spezialaufgaben wie Fliegen fangen besser von Fröschen beherrscht werden [Ganten 2003]. Das sollte auch Schule fördern, also Vielseitigkeit verlangen statt stumpfsinniger Tätigkeiten. Dem gegenüber steht, dass Ingenieure meist Standardprobleme mit Standardmethoden bearbeiten. Und Schüler können in einer 4,5-stündigen Abi-Prüfung nicht dauernd hochkonzentriert arbeiten und brauchen Lösungsmethoden, die eine reduzierte Hirnleistung vertragen. Also doch Algorithmen.

Sprezzange zum Heben von Steinquadern





Schlusslinienverfahren (Auflager zeichnerisch ermitteln)

TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein

Ausführliche Darstellung siehe folgende Seiten.

Anwendung

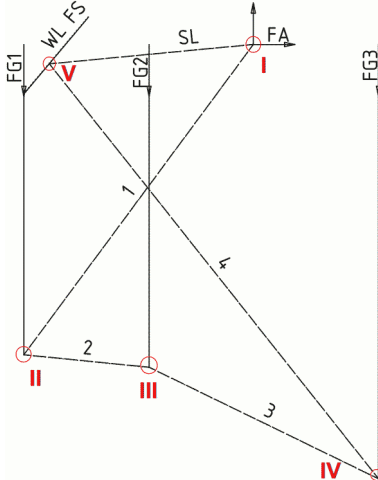
Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte

Gesucht: 1x Kraft (Betrag + WL)

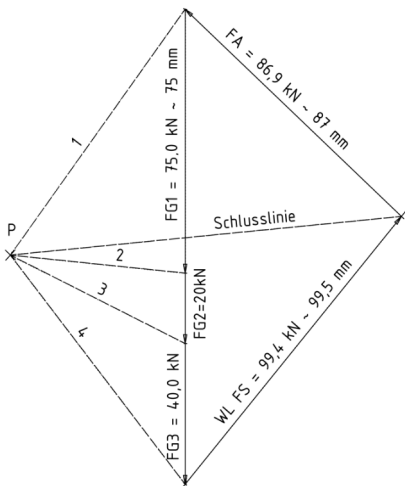
+ 1x Betrag (WL bekannt)

Beispiel: HP 97/98-1 Verladeanlage

Lageplan Brücke $M_L = 1\text{m} / 10\text{mm}$



Kräfteplan $M_K = 10\text{ kN} / 10\text{ mm}$

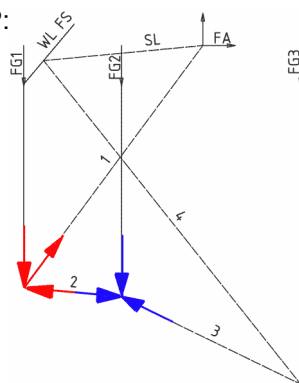


Lösungsgedanke

Ist wie bei allen grafischen Verfahren:

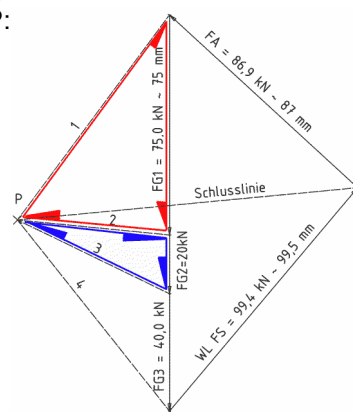
Kräfte, die im LP auf einen Punkt wirken, ergeben im KP ein geschlossenes Vieleck

LP:

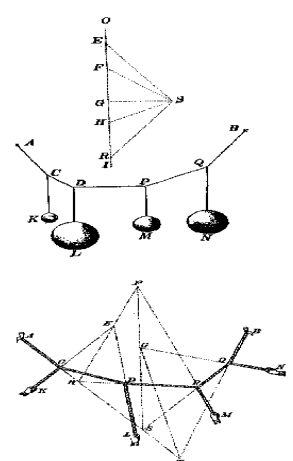


Seil-/Polstrahlen können als interne Kräfte interpretiert werden, die sich wieder aufheben. Kräfte, die im Lageplan auf einen Punkt wirken, ergeben im Kräfteplan ein Vieleck, wobei die Pol-/Seilstrahlen doppelt, aber entgegengesetzt wirken und sich dadurch aufheben (Beispiel Polstrahl 2 in rot und blau).

KP:



Seil- und Kräftepolygon nach Pierre Varignon (1654 - 1722) aus seinem Buch *Nouvelle Mécanique ou Statique* (1725). Solche Überlegungen wurden beim Bau von Brücken eingesetzt. Aus [Kurrer 2002] FO Seilpolygon



Arbeitsplan

1. Lageplan

Zuvor Lageplanskizze, dann Lageplan mit Wirklinien der gegebenen Kräfte zeichnen.

2. Kräfteplan

– bekannte Kräfte addieren

Es empfiehlt sich, die Kräfte im Kräfteplan in einer Reihenfolge zu zeichnen, die dem Lageplan entspricht (z.B. Kräfte im LP von links nach rechts). Dies verringert kreuzende Seilstrahlen.

Bisher alles wie gehabt.

3. KP: Anschluss der unbekannten Kräfte festlegen

Die Kraft F_A kann oben im KP anschließen und F_S unten oder umgekehrt, aber damit es später nicht zu Verwechslungen kommt, ist es wichtig, sich festzulegen und dies auch im KP einzutragen. Danach trägt man auch die WL von F_S ein.

4. KP: Pol P wählen

– Polstrahlen möglichst rechtwinklig zu den Kräften

Die Polstrahlen sollen möglichst rechtwinklig zu den Kräften stehen, da sonst die Seilstrahlen wegen der spitzen Winkel leicht außer Kontrolle geraten und das Blatt verlassen. In diesem Fall ist es die zweckmäßigste Lösung, weitere Blätter anzukleben. Andere Lösungen kosten mehr Zeit.

Man kann auch die Maßstäbe klein wählen, aber das verringert die Genauigkeit.

5. KP: Polstrahlen einzeichnen

und fortlaufend nummerieren

– beginnend im zweiwertigen Lager

Beginn im zweiwertigen Lager (hier F_A), weil das Lager der einzige bekannte Punkt seiner Wirklinie ist. Beginnt man nicht in F_A , wird man es nicht mehr treffen. Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man beliebig beginnen.

Fortlaufend nummerieren richtet sich nach dem Verlauf der Kräfte, s.u. → "Bildergeschichte" Schritt 8. Eigentlich ist die Bezeichnung der Polstrahlen gleichgültig, aber wenn man sie durcheinander nummeriert, verliert man leicht den Überblick. Der Polstrahl zwischen F_A und F_S kann noch nicht eingezeichnet werden.

Parallelverschiebung!

Aus einem Polstrahl zwischen den Kräften A und B wird ein Seilstrahl zwischen den Wirklinien der Kräfte A und B. Aufeinanderfolgende Seilstrahlen kreuzen sich auf den Wirklinien der Kräfte, die von den entsprechenden Polstrahlen eingeschlossen sind. Alle Seilstrahlen müssen zusammen mit der Schlusslinie ein Polygon ergeben.

Schnittpunkte mit den WL zur besseren Übersichtlichkeit einzeichnen und mit römischen Ziffern nummerieren (hier nicht dargestellt). Seilstrahlen bekommen die Nummern ihrer korrespondierenden Polstrahlen.

7. LP: Schlusslinie eintragen

SL schließt die Seilstrahlen

8. KP: Schlusslinie übertragen

Schnittpunkt SL / bekannte WL ist der letzte gesuchte Kraftknoten im KP

9. KP vervollständigen



Schlusslinienverfahren in Bildern

1) LP $M_L = 1 \text{ m} / 10 \text{ mm}$

Wie bei allen zeichnerischen Verfahren wird ein Lageplan erstellt. Die Abstände zwischen den Kraftangriffspunkten müssen (Lage-)maßstabsgetreu eingezeichnet werden, damit die Wirkung der Momente richtig in die Lösung einfließt. Wirklinien WL werden richtungstreu eingezeichnet. Zweiwertige Lager (F_A ohne Wirklinie) können mit einem Koordinatenkreuz gekennzeichnet werden. Die Länge der Kraftlinien spielt keine Rolle.

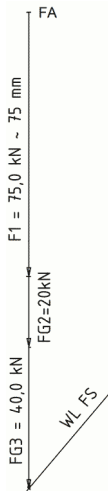


2) KP $M_K = 10 \text{ kN} / 10 \text{ mm}$

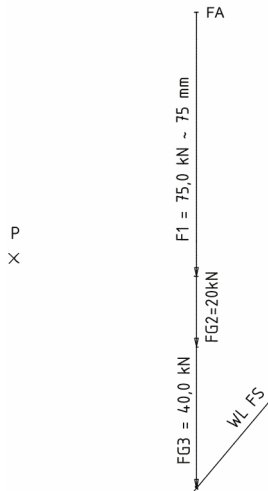
Wie bei allen zeichnerischen Verfahren werden im Kräfteplan zunächst die bekannten Kräfte maßstabstreu hintereinander gekettet. Die Reihenfolge ist beliebig, aber wenn man eine Reihenfolge von links nach rechts oder umgekehrt einhält, gibt es später weniger Durcheinander bei den Seilstrahlen (Schritt 15).



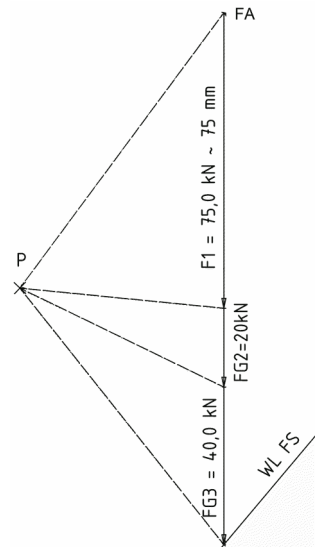
3) KP: Die Kraft F_A kann man oben oder unten an die vorhandene Kraftkette anschließen, aber man muss sich festlegen. Ebenso markiert man vorhandene Wirklinien unbekannter Kräfte und bezeichnet sie.



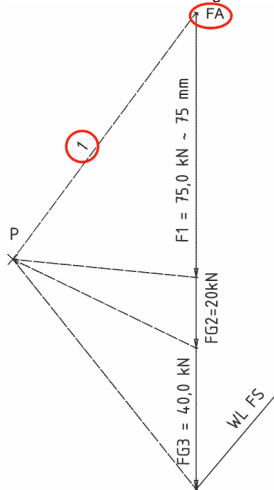
4) KP: Neben den KP zeichnet man ein beliebigen Pol P ein. Wenn der Pol P so liegt, dass die Polstrahlen möglichst rechtwinklig zu den Kräften verlaufen (Schritt 5), verringert man spätere Probleme mit dem Platzbedarf.



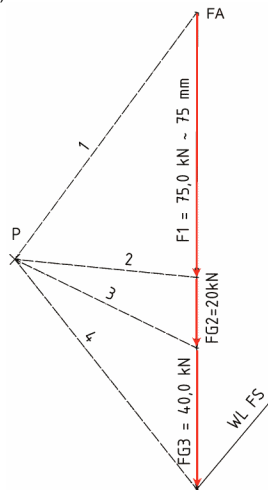
5) KP: Zwischen den Pol und die Verbindungsstellen von je 2 Kräften zeichnet man die Polstrahlen ein.



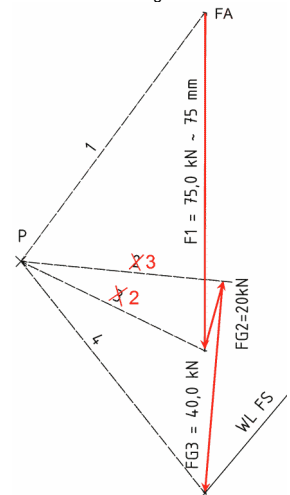
6) KP: Die Polstrahlen werden nummeriert, beginnend im zweiwertigen Lager (Festlager) (Begründung → Schritt 11). Wenn kein zweiwertiges Lager vorhanden ist, kann man an jedem Ende der vorhandenen Kraftkette beginnen.



7) KP: Die Polstrahlen werden fortlaufend nummeriert, wobei fortlaufend nicht einfach von oben nach unten bedeutet, sondern sich nach der Reihenfolge der Kräfte richtet (Beispiel siehe Schritt 8).

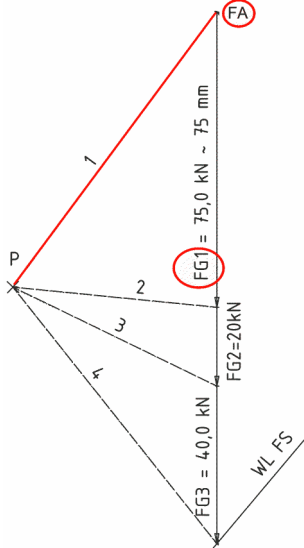


8) KP (Eingeschobenes Bild): Wenn die Kräfte hin und her liefern, müsste die Nummerierung der Polstrahlen folgen.

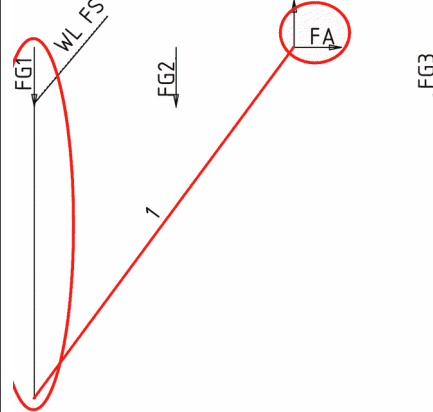




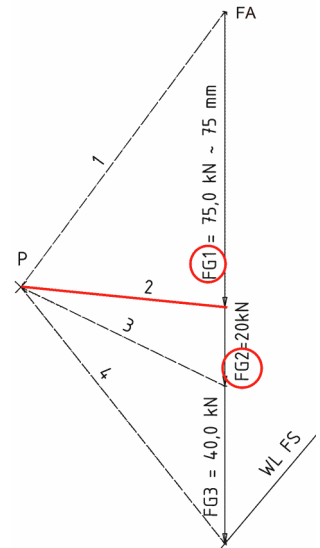
9) KP Polstrahl 1 bildet einen Schnittpunkt mit F_A und F_{G1}



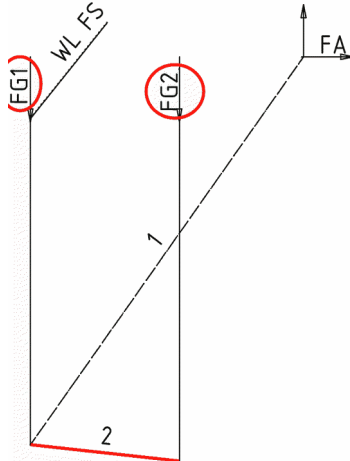
10) LP: Der Polstrahl 1 wird parallel verschoben in den Lageplan und bildet dort den Seilstrahl 1. Er verläuft zwischen den Wirklinien der gleichen Kräfte wie im Kräfteplan, in diesem Fall zwischen der Wirklinie von F_A und der Wirklinie von F_{G1} . Hier wird auch deutlich, warum man im zweiwertigen Lager A beginnen muss: Von der Wirklinie von F_A ist nur ein Punkt (im Lager A) bekannt, und wenn man nicht dort beginnt, wird man die Wirklinie von F_A später nicht mehr treffen.



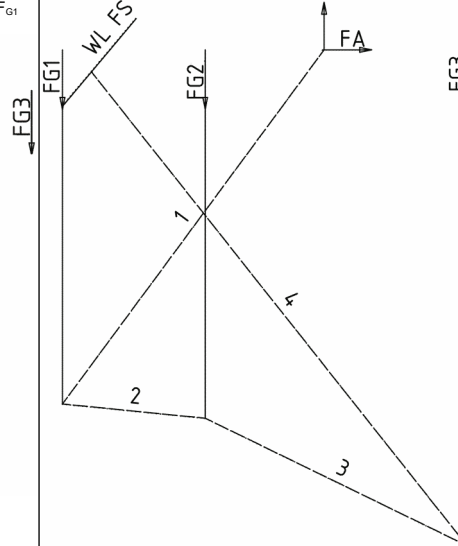
11) KP: Polstrahl 2 bildet einen Schnittpunkt mit F_{G1} und F_{G2}



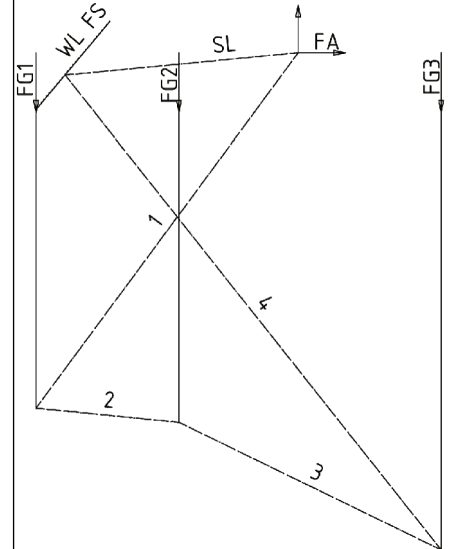
12) LP: Seilstrahl 2 schließt sich an Seilstrahl 1 an, verläuft parallel zum Polstrahl 2 und verbindet die Wirklinien von F_{G1} und F_{G2} .



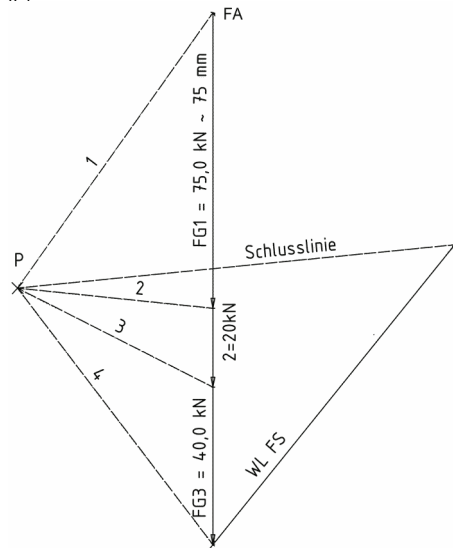
13) LP Seilstrahlen 3 und 4 ergänzt.



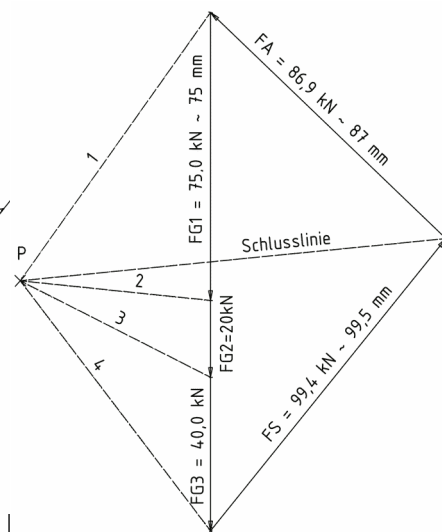
14) LP: Schlusslinie SL eintragen. Die Schlusslinie schließt den Kreis der Seilstrahlen.



15) KP: Schlusslinie aus dem LP übertragen. Die Schlusslinie im KP verläuft parallel zur Schlusslinie im Lageplan vom Pol P bis zur Wirklinie von F_s .



16) KP vervollständigen. Der Schnittpunkt zwischen der Schlusslinie und der bekannten Wirklinie F_s ist der letzte gesuchte Kraftknoten. Die Richtung der gesuchte Kräfte muss gleichsinnig mit den bekannten Kräften wirken.



Hinweise:
Die Zeichnungen wurden mit einem CAD-Programm erstellt, von Hand ist die angegebene Genauigkeit nicht erreichbar. Aber mehr als 5% Abweichung sollten es bei diesem vergleichsweise einfachen Plan nicht sein. Wenn spitze Winkel und lange Linien ins Spiel kommen, kann es etwas mehr werden.



Schlusslinienverfahren bei 3 gesuchten Beträgen

lösbar bei 2 parallelen WL sind → Fz auf schiefer Ebene

Anwendung

Gegeben: Beliebige Anzahl auch paralleler Kräfte
3 WL (davon 2 parallel) ohne Beträge
Gesucht: 3x Beträge von Kräften

TG: nicht mehr; FTM, MVK: nein

Auch wenn es kein reinrassiges Schlusslinienverfahren ist, lässt sich dieser Aufgabentyp, der im Abi gelegentlich auftritt, zwanglos mit dem Schlusslinienverfahren lösen, solange zwei der gesuchten Kräfte parallel sind – und das waren sie bisher im Abi.

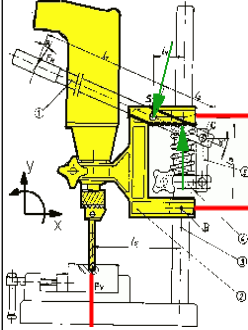
Wenn 3 Beträge gesucht sind, deren Wirklinien nicht parallel sind, ist das Schlusslinienverfahren nicht mehr geeignet. In diesem Fall kann man die bekannten Kräfte mit dem ähnlichen Seileckverfahren zu einer resultierenden Kraft zusammenfassen und diese dann mit dem Vier-Kräfte-Verfahren wieder zerlegen (siehe unten: "kombinierte Verfahren"). Aufgaben dieses Typs sind meines Wissen bisher noch nicht im Abi (TG Baden-Württemberg) vorgekommen, aber vom Lehrplan her kann man sie nicht ausschließen.

Typisch bei Fahrzeugen auf schiefer Ebene.

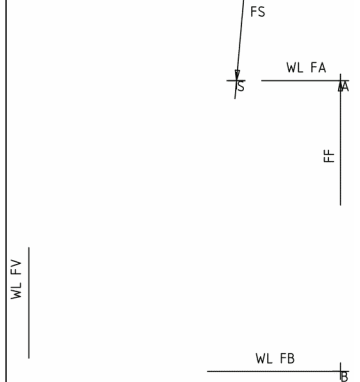
Beispiel: HP94/95-1 Bohrmaschine..

Besonderheiten bei 3 WL

0. Lageplanskizze



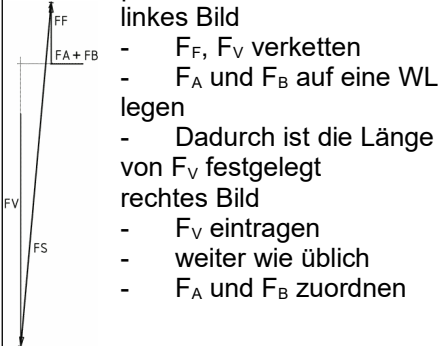
1. Lageplan, $M_L = 100N/20mm$



Lageplanskizze, (Lage-)maßstabsgetreuer Lageplan und der Kräfteplan bis zum Punkt "Alle bekannten Kräfte verketten.." ist bei allen zeichnerischen Verfahren gleich.

Die roten Linien in der Lageplanskizze sollen die Wirklinien der gesuchten Kräfte darstellen. Eine Richtungsangabe ist für sie nicht erforderlich, das wäre in dem Fall auch ziemlich schwierig. Die Richtungen ergeben sich im Verlauf der Lösung.

2a. Kräfteplan



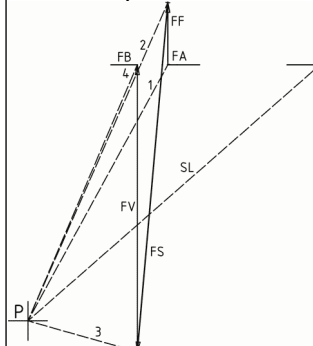
linkes Bild

- F_F , F_V verketten
- F_A und F_B auf eine WL legen

rehtes Bild

- F_V eintragen
- weiter wie üblich
- F_A und F_B zuordnen

2b. Kräfteplan



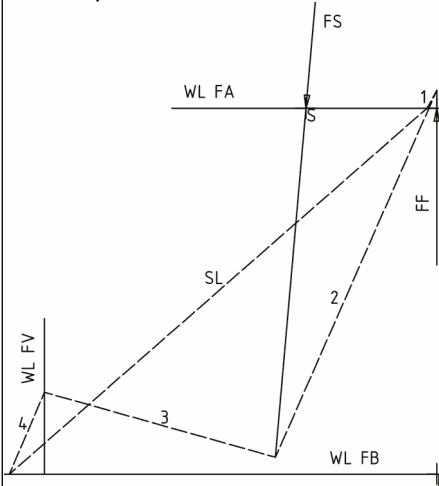
Nachdem man die bekannten Kräfte F_F und F_S verketten hat, fasst man die parallelen Kräfte F_A und F_B auf einer Wirklinie zusammen und erkennt, dass es für F_V nur noch eine Möglichkeit gibt, nämlich bis zur Verlängerung der gemeinsamen Wirklinie von F_A und F_V .

Somit ist F_V bekannt und man kann wie üblich weiter machen.

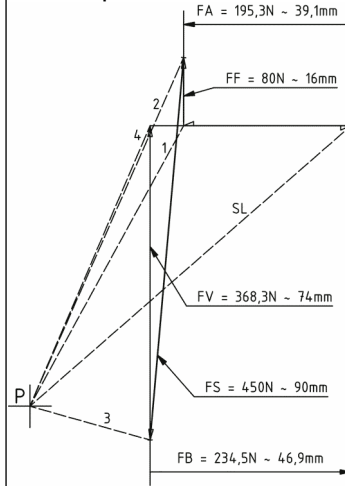
D.h. man legt fest, wo F_A und F_B am neuen Kräfteplan anschließen, zeichnet die Polstrahlen usw. Man beachte Nummerierung der Polstrahlen in der Reihenfolge der zugehörigen Kräfte.

Die Schlusslinie zeigt dann an, wo F_B aufhört und F_A anfängt

LP komplett



KP komplett



Im fertigen Kräfteplan verlaufen die Kräfte F_A und F_B teilweise auf der gleichen Linie. F_B wirkt nach rechts und F_A nach links, sodass der Kräftezug geschlossen ist.

Vertiefung

Ub Statik Abi 9.1) HP92/93-1 Mountainbike

**Seileckverfahren****Anwendung**

Bestimmung einer Resultierenden aus beliebigen Kräften

Gegeben: beliebig

Gesucht: 1x Kraft (Betrag + Richtung + Lage WL)

Prinzip

ähnlich wie Schlusslinienverfahren

gesucht wird eine (!) Kraft und die Lage ihrer Wirklinie

– alle Polstrahlen sind bekannt, deshalb gibt es keine Schlusslinie

– Betrag und Richtung der einzig fehlenden Kraft ergibt sich im Kräfteplan

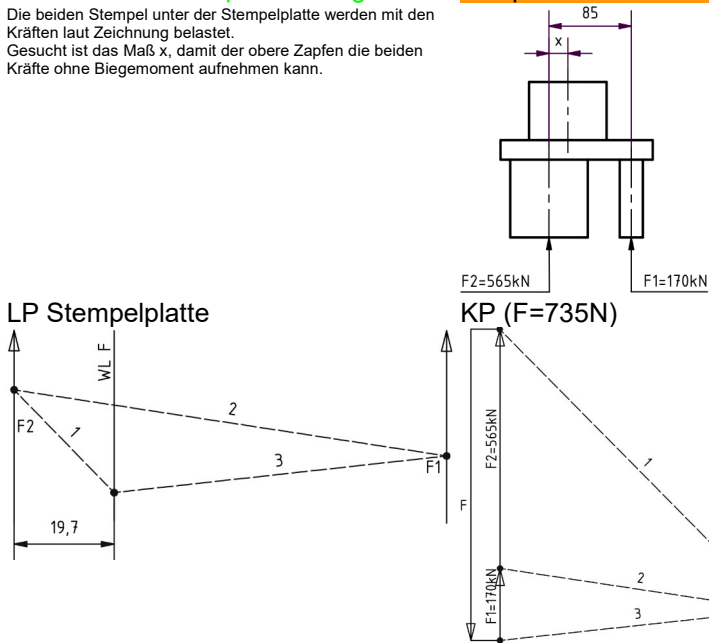
– Die Lage der WL der gesuchten Kraft ergibt sich im LP aus dem Schnittpunkt der letzten beiden Seilstrahlen

nur TG:

Ütg: Neu im Lehrplan, bisher nicht dran gekommen, sehr ähnlich zum SLV

HP 85/86-2 Kurbelpresse Aufg.2

Die beiden Stempel unter der Stempelplatte werden mit den Kräften laut Zeichnung belastet.

Gesucht ist das Maß x , damit der obere Zapfen die beiden Kräfte ohne Biegemoment aufnehmen kann.**Beispiel****Kombination aus SEV und 4KV**

Alternativ: 2 Kräfte zu einem zweiwertigen Lager zusammenfassen

Anwendung

Wenn für das 4KV zu viele Kräfte mitspielen und das SLV mit 3 gesuchten Beträgen nicht greift, weil die WL der gesuchten Kräfte nicht parallel sind.

Ütg: Wie löst man das Beispiel (links unten) grafisch, wenn das Vorderrad schon auf einer waagerechten Ebene steht?

Trat bisher im Abi nicht auf, ist aber vom Lehrplan her nicht völlig auszuschließen.

FO erstellen

Beispiel: HP92/93-1 Mountainbike

(Änderung: Vorderrad auf einer waagerechten Ebene)

Arbeitsplan

Kräfte mit SEV zusammenfassen

Resultierende mit 4KV zerlegen

Vertiefung

NP 1998/99-2 Geländewagen Aufgabe 1 (Änderung: zusätzliche Masse im Fahrzeug, z.B. Ladung)



Nicht unterrichten

Zusammenhang zw.

Kraft und Beschleunigung

Die 3 Prinzipien Trägheit, Aktion und Reaktion entsprechen den 3 Newtonschen Axiomen [Tipler 1995]. Das 1. Axiom wurde schon von Galilei gefunden [Böge, Techn. Mechanik].

Newton 1: Trägheitsprinzip

(1. Newton'sches Axiom) Das Trägheitsgesetz meint den Zustand ohne zusätzliche Kräfte, bei dem ein Körper träge in seinem Bewegungszustand verharrt [1].
Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der bedeutendsten Wissenschaftler.
Der Zusammenhang wurde schon 1638 von Galilei formuliert → [Gross 2015] S.36

Ohne Kraft keine Bewegungsänderung (= Trägheit)

↔ Bewegungsänderung benötigt Kraft

Bewegungsänderung = Beschleunigung

- = Beschleunigen (umgangssprachlich)
- = Bremsen (= negative Beschleunigung)
- = Kurvenfahren (= Fliehkraft, Querschleif.)

Newton 2: Aktionsprinzip

(oder dynamisches Grundgesetz)

(2. Newton'sches Axiom): Je größer die Masse und je größer die Beschleunigung ist, desto größer ist die (result.) Kraft und umgekehrt:

Kraft = Masse · Beschleunigung

$$F = m \cdot a$$

$$[N] = [kg \frac{m}{s^2}]$$

Gewichtskraft

Die Erde beschleunigt alle Körper gleich

$$F_G = m \cdot g \quad \text{Gewichtskraft}$$

$$g = 9,81 \frac{m}{s^2} \approx 10 \frac{m}{s^2} \quad \text{Erdbeschleunigung, Ortsvektor}$$

das bedeutet:

$$10 N \approx 1 kg \cdot 10 \frac{m}{s^2}$$

$$\text{bzw.} \quad 10 N \approx 1 kg$$

Newton 3: Reaktionsprinzip

(=Wechselwirkungsgesetz, actio = reactio)

(3. Newton'sches Axiom)

Kräfte treten immer paarweise auf (Kraft + Gegenkraft)

[Gross 2015]: Zu jeder Kraft gibt es stets eine entgegengesetzt gerichtete gleich große Gegenkraft.

Überlegungen zum Freimachen – hier nicht unterrichten

Da sich Kräftepaare immer aufheben, d.h. in der Summe 0 ergeben, bringt es nichts, mit Kräftepaaren zu rechnen. Vielmehr ist es Sinn des Freimachens, Kräftepaare aufzubrechen und nur mit einer der beiden Kräfte zu rechnen. Die Frage ist, mit welcher der beiden Kräfte man rechnen soll.

Prinzip von d'Alembert

Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (*1717 - † 1783 in Paris) war ein bedeutender Physiker und Mathematiker und ein Herausgeber der Encyclopédie.

Wenn ein System statisch nicht im Gleichgewicht ist, wird es von der Resultierenden beschleunigt und

$F = m \cdot a$ wird dynamische Gegenkraft.

Damit können Aufgaben der Dynamik mit Verfahren der Statik gelöst werden.

Vertiefung

Aktionsprinzip „Kraft = Masse mal Beschleunigung“ →

$$[N] = [kg \frac{m}{s^2}] \rightarrow 1 \frac{m}{s^2} = 1 \frac{N}{kg}$$

→ 1 N beschleunigt 1kg mit 1m/s²

→ 9,81 N beschleunigt 1kg mit Erdbeschleunigung

FTM, MVK: ca. 90' Zeitbedarf (ca. 45' ohne Übungen); TG: entfällt

Sir Isaac Newton (*1642 - †1726) war einer der ganz großen Wissenschaftler. Kurz vor seinem Tod hat er nachweislich 4 Personen die Anekdote vom fallenden Apfel erzählt, der ihn auf die Schwerkraft gebracht haben soll. Dadurch weiß man zwar nicht, ob die Geschichte stimmt, aber, dass Newton wollte, dass die Geschichte bekannt wird. Ob Newton damit u.a. auf die biblische Frucht der Erkenntnis anspielen wollte? Oder das Gegenteil?

AM Kreidekästchen auf einer hochgelegenen Fläche

1) Was wird benötigt, das Kreidekästchen zu bewegen? → Kraft
Bei Antworten wie Finger o.ä.: Es geht auch ohne Finger.

Demo: Kreidekästchen mit Finger (= Kraft) anschubsen

2) Wie lange bleibt die Bewegung erhalten? → ohne Reibung ewig

Viele Schüler meinen aus der Erfahrung mit der allgegenwärtigen Reibung, dass Bewegung nur aufrechterhalten wird, solange eine Kraft wirkt. Zur Demo:

Demo: Pendel (Taschenmesser) pendelt nach einem Schub sehr lange

3) Wodurch wird die Bewegung verlangsamt? → durch Reibung

4) Wie lange dauert eine Bewegung ohne Reibung oder Antrieb?

5) Vertiefung: Wie kann man beschreiben, was Beschleunigung ist? Bei welchen 3 Gelegenheiten übt ein Kfz Kraft auf die Mitfahrer aus? → Beschleunigen, Bremsen, Kurvenfahrt

1) Ist die Beschleunigung eines Porsche und eines 38t bei gleicher Kraft (Drehmoment) gleich groß? → hängt noch von der Masse ab

2) Einheit m/s²: Ein Kfz beschleunige von 0 auf 100km/h in 5s:

Folgerung: Ein Porsche beschleunigt am schnellsten, wenn man ihn fallen lässt. Das erste s kommt $a = \frac{100 \text{ km/h}}{5 \text{ s}} = \frac{100000 \text{ m}}{3600 \text{ s} \cdot 5 \text{ s}} = 5,6 \frac{m}{s^2}$ aus der Geschwindigkeit (=Änderung des Weges pro Zeit), das 2. s aus der Änderung der Geschwindigkeit (pro Zeit).

P = Impuls. Die Formulierung Newtons war weitsichtig. Er hat nicht nur die Beschleunigung mit dv/dt umfassender formuliert, sondern auch andere Möglichkeiten, z.B. Kräfte durch Umlenkung von Fluidströmen: $F = \dot{m} \cdot v$. Gemäß Relativitätstheorie erhöht F nicht nur die Geschwindigkeit, sondern auch die Masse; messbar wird es erst bei sehr großen Geschwindigkeiten.

1) Kreidekästchen in der Luft halten, Loslassen andeuten: welche Kraft wirkt auf das Kreidekästchen, wenn man es loslässt? → Gewichtskraft
Versuch unterschiedlich schwere Gegenstände (z.B. Kreide/Papier) in die Luft halten

2) Wenn die Erde auf beide Körper dieselbe Gewichtskraft ausübt, welcher Körper müsste schneller fallen? → der Leichtere, weil seine kleine Masse durch dieselbe Kraft mehr beschleunigt wird (s.o.)

3) Welcher fällt schneller und warum? → ohne Luftwiderstand keiner
Vers.: Fallen von ähnlich großen Körpern verschiedenen Gewichts, z.B. Messer und Kreide
AM Röhre mit Vakuum

4) Vgl. $F = ma$: wenn verschiedene Massen gleich beschleunigt werden, übt dann die Erde eine konstante Kraft auf uns? → nein, aber Erdbeschleunigung ist konstant.

Nicht nur der Vollständigkeit halber, sondern zur Vorbereitung des Problems, in welche Richtung Kräfte wirken.

1) Kreidekästchen in der Luft fällt wegen der Erdbeschleunigung. Warum fällt das Kreidekästchen auf dem Tisch nicht? Warum wird ein Auto bei konstant 100km/h nicht schneller, obwohl der Motor ständig Kraft aufbringt? → Gegenkraft

→ Nach der üblichen Richtungsdefinition betrachten wir die Kräfte, die vom Rest der Welt auf den freigemachten Körper wirken.

Man könnte auch mit den Kräften rechnen, die vom freigemachten Körper auf den Rest der Welt wirken. Dieses System würde nur die Vorzeichen umdrehen, und somit auch die Richtung der Schwerkraft: Newtons Apfel würde als freigemachter Körper an der Erde ziehen. Physikalisch ist das sogar richtig, aber für uns fehlerträchtig ungewohnt.

Die Resultierende Kraft ist diejenige, die das System beschleunigt, die dynamische Kraft ist die Trägheitskraft des Systems.

Damit ist die Aufnahmekapazität der Schüler meist erreicht. Gewichtskraftberechnungen dienen hier der Abwechslung und, da sie relativ einfach sind, kann man gleichzeitig auf andere Themen übergreifen.

Vertiefung

MVK: [EuroRBM]

FTM: [Böge Aufg.] Aufgabe 495..514

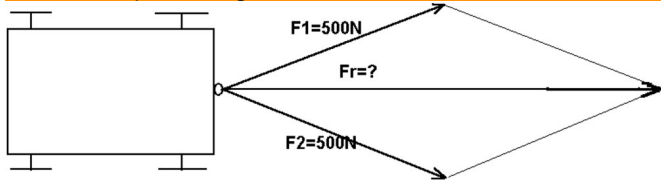
Sind gleichzeitig eine passende Überleitung vom Fach Dynamik

Statik_TA_Kraft-Beschleunigung.odt

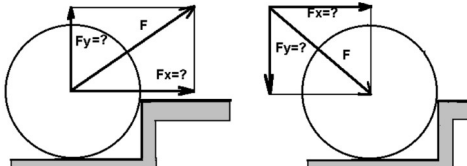


Grundoperationen der Statik

1. Kräfteparallelogramm



Die resultierende Kraft F_r zweier in einem Punkt angreifender Kräfte ist die Diagonale des aus beiden Kräften gebildeten Parallelogramms



2. Längsverschiebung



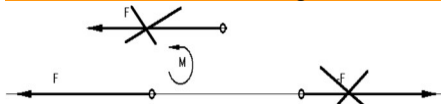
Kräfte können auf ihren Wirklinien frei verschoben werden.

3. Erweiterungssatz



Zwei gleich große, gegensinnige, auf gleicher Wirklinie liegende Kräfte können zu einem Kräftesystem hinzugefügt oder von ihm fortgenommen werden, ohne dass sich die Wirkung des Kräftesystems ändert.

4. Parallelverschiebung



Eine Kraft darf auf eine parallele Wirklinie verschoben werden, wenn ein Moment $M = \text{Kraft} \times \text{Verschiebarm}$ hinzugefügt wird (Versatzmoment).

(Kraft-)Moment einer Einzelkraft

ist das Produkt aus Kraft und Wirkabstand (rechtwinklig zur Kraft gemessen)

Definition

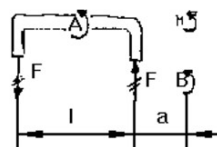
(+) = linksdrehend

(-) = rechtsdrehend

Kräftepaare

bestehen aus zwei gleich großen, parallelen, entgegengesetzt wirkenden Kräften. Sie drehen einen freibeweglichen Körper ohne ihn zu verschieben.

z.B. Fahrradlenker



$$A: M = F \cdot \frac{l}{2} + F \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l$$

$$B: M = F \cdot (l + a) - F \cdot a = F \cdot l$$

Das Drehmoment eines Kräftepaares ist an jedem Ort der Ebene gleich und kann deshalb beliebig in der Ebene verschoben werden.

MVK, FTM, TG: nicht unterrichten, nur beiläufig einbringen

Oben wurden schon einige „Rechenregeln“ für Kräfte eingesetzt. Welche weiteren sind bekannt?

Wie der folgende Verschiebesatz vom Meister selbst als Axiom eingeführt (Sir Isaac Newton 1643-1727) [4].

Analytische Berechnung:

- 1 Zerlegen der Kräfte in x- und y-Komponenten F_{1x} , F_{1y} , F_{2x} und F_{2y}
- 2 addieren der Komponenten $F_{rx} = F_{1x} + F_{2x}$, F_{ry} analog

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}; \quad \alpha = \arctan \frac{F_{ry}}{F_{rx}}; \quad \text{Zählrichtung beachten}$$

3 Vektorielle Berechnung ist einfacher, da die Komponenten F_x und F_y explizit vorliegen:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1x} + F_{2x} \\ F_{1y} + F_{2y} \end{bmatrix}$$

Kräfte müssen, wie alle Vektoren, unter Berücksichtigung ihres Betrages, ihrer Wirklinie und ihrer Richtung addiert werden. Anwendung und Übung siehe unten
Resultierende Kraft ist diejenige gedachte Ersatzkraft, die dieselbe Wirkung auf einen Körper ausübt wie die Einzelkräfte $F_1, F_2, \dots$ zusammen.

Zur Verdeutlichung der Kraftvektoren, ihrer Zerlegung und Zusammensetzung: Umgekehrt geht es auch, Anwendung später.

Auf der Ebene macht es ohne Reibung keinen Unterschied, ob man den Kinderwagen schiebt oder zieht. Am Randstein weiß jeder aus Erfahrung, dass Ziehen günstiger ist. Im Bild erkennt man, dass die aufwärts gerichtete Komponente F_y dem Wagen über den Randstein hilft. Tatsächlich ist auch auf der Ebene das Ziehen günstiger, weil es den Wagen entlastet und die Reibung vermindert. Trotzdem schiebt man Kinderwagen wegen des Blickkontaktes zum Kind und weil man sich abstützen kann.

In [Böge Technologie] und im LPE sind der Verschiebe- und der Erweiterungssatz in der Reihenfolge vertauscht.

AM Metallstab, Gummiband schieben und ziehen

Erkenntnis: für starre Körper ist es belanglos, ob eine Kraft „vorne“ oder „hinten“ einfließt (z.B. Heck- oder Frontantrieb). Bei nicht starren Körpern ergeben sich Änderungen (z.B. Krafteingriff in Gewinden, Gummiband unter dem Einfluss von Druckkraft und Reibung). Andere Veränderungen wie Stabilität sind nicht Thema der Statik, siehe Definition.

Folgt aus den Axiomen Parallelogramm und Längsverschiebung.

Welches F_r haben diese beiden betragsmäßig gleich großen Kräfte?

$F_r = 0$, deshalb kann es in jedes System eingesetzt werden.

„Auf gleicher Wirklinie“ folgt aus dem Längsverschiebungssatz.

Folgt aus den vorigen Axiomen und der Momentengleichung.

Vorgehensweise:

- 1 Kraft F oben eintragen
- 2 Kraft F und $-F$ unten eintragen (Erweiterungssatz)
- 3 Moment einsetzen, ursprüngliche Kraft F und $-F$ streichen.

Wird die Kraft auf ihrer Wirklinie ersetzt, entsteht kein Moment (Längsverschiebesatz).

Das Versatzmoment wirkt an jeder Stelle des Körpers

siehe oben, Kräftepaar am Beispiel Fahrradlenker.

Ültg: Tisch seitlich schieben: welche Wirkung von Kräften muss man auch in der Statik berücksichtigen?

Betrag und Richtung eines Momentes hängt von der Kraft und dem Bezugspunkt ab.

Einheit Newtonmeter [Nm], nicht zu verwechseln mit Joule $J = Nm$: beim Drehmoment stehen Kraft und Weg rechtwinklig, bei der Arbeit parallel zueinander.

Die Richtung der Drehachse steht senkrecht auf der von Kraft und Hebelarm aufgespannten Ebene. In unserem Fall ist sie die z-Achse und kommt aus der Ebene heraus. Es gilt die

Rechtehandregel: Daumen der rechten Hand in Richtung der Drehachse, und die Finger weisen in positiver Drehrichtung.

Ültg: Schüler sollen einen Gegenstand mit einer Kraft drehen.

Geht nicht, immer ist Reibung, Gravitation, Trägheit o.ä. im Spiel.

Einzelkräfte bewirken keine Drehung. Ohne Reibung, Lager o.ä. würden sie nur eine Verschiebung bewirken.

Wird durch je zwei kurze Striche gekennzeichnet (wie parallele Linien)

Die Differenz der Hebelarme ist an jedem Punkt gleich, deshalb ist das Drehmoment an jedem Punkt gleich. Da die Kräfte sich ansonsten aufheben, kann dieses Kräftepaar durch jedes andere mit gleichem Drehmoment ersetzt werden.

Ein Kräftepaar kann durch ein anderes ersetzt werden, wenn beide das gleiche Drehmoment haben, z.B. doppelter Betrag und halber Abstand; gleiche Kräfte in anderer Ausrichtung.



Resultierende Kraft in der Ebene berechnen

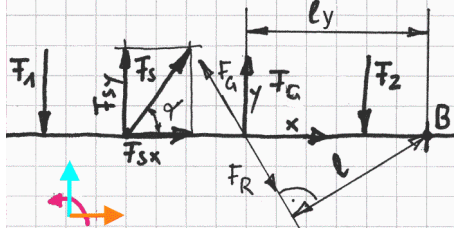
Zeichnerisches Pendant: Seileckverfahren.

Anwendung

- Ermittlung einer resultierenden Kraft mit Betrag, Richtung und Lage

Lageskizze

Balken ohne Auflager mit Gegenkraft



(F_6 und F_R erst im Lauf der Berechnung eingetragen)

$$F_{sx} = F_s \cdot \cos \alpha = 25 \text{ kN} \cdot \cos 60^\circ = 12,5 \text{ kN}$$

$$F_{sy} = F_s \cdot \sin \alpha = 25 \text{ kN} \cdot \sin 60^\circ = 21,65 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_x = 0 = +F_{sx} + F_{Gx} \rightarrow F_{Gx} = -F_{sx} = -12,5 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 = -F_1 + F_{sy} + F_{Gy} - F_2 \rightarrow F_{Gy} = F_1 - F_{sy} + F_2$$

$$= 30 \text{ kN} - 21,65 \text{ kN} + 20 \text{ kN} = 28,3 \text{ kN}$$

$$F_G = \sqrt{F_{Gx}^2 + F_{Gy}^2} = \sqrt{(-12,5)^2 + (28,3)^2} \text{ kN} = 31 \text{ kN}$$

$$\alpha_G = \arctan \frac{F_{Gy}}{F_{Gx}} = \arctan \frac{28,3 \text{ kN}}{-12,5 \text{ kN}} = -66,2^\circ$$

$$|F_R| = |F_G| = 31,0 \text{ kN}$$

$$\alpha_R = \alpha_G = -66,2^\circ$$

(Dreh-)Moment = Kraft · Hebelarm (Kraft $\perp$ Hebelarm)
Das Vorzeichen ist positiv, wenn ein Moment in der Richtung des Koordinatensystems (siehe rotes Symbol) wirkt.

$$\Sigma M_B = 0$$

$$= F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_G \cdot l \rightarrow$$

$$l = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_G}$$

$$= \frac{20 \text{ kN} \cdot 0,7 \text{ m} - 21,65 \text{ kN} \cdot (1,5 + 0,7) \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot (2 + 1,5 + 0,7) \text{ m}}{31,0 \text{ kN}}$$

$$= \frac{14 - 36,305 + 159,9}{31,0} \text{ m}$$

$$= 2,98 \text{ m}$$

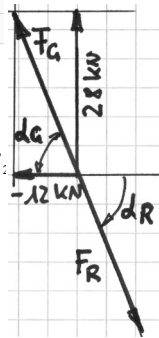
Beispiel FTM: [Böge Aufg.] 79

Arbeitsplan

1. - 7. F_R und α_R wie im zentralen KS

ermitteln

- nur gefragte Kräfte
- Gegenkraft F_G eintragen



8. Lage von F_G / F_R per $\Sigma M = 0$

8a. Drehpunkt wählen

- Im Bezugspunkt der Lage

7b. Momentengleichgewicht $\Sigma M = 0$

- im Drehpunkt ansetzen
- Hebelarm und Kraftkomponente je nach Fragestellung
- Ergibt eine Gleichung mit einer Unbekannten = sofort lösbar.

Das Freimachen ist wie immer unverzichtbar, es genügt eine unmaßstäbliche Skizze.

Es werden nur die Kräfte eingetragen, für die die resultierende Kraft F_R ermittelt werden soll. Statt F_R sollte man aber deren Gegenkraft F_G ermitteln, weil man diese mit den normalen Gleichgewichtsbedingungen berechnen kann ohne Verrenkungen mit dem Vorzeichen.

Die Resultierende F_R wirkt dann entgegen der Gegenkraft F_G .

Die Lage von F_R bzw. der Abstand kommt mit dem Momentengleichgewicht ins Spiel.

Alternativ l_y :

$$\Sigma M_B = 0$$

$$= F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) - F_{Gy} \cdot l_y$$

$$l_y = \frac{F_2 \cdot l_3 - F_{sy} \cdot (l_2 + l_3) + F_1 \cdot (l_1 + l_2 + l_3)}{F_{Gy}}$$

$$= \frac{20 \text{ kN} \cdot 0,7 \text{ m} - 21,65 \text{ kN} \cdot (1,5 + 0,7) \text{ m} + 30 \text{ kN} \cdot (2 + 1,5 + 0,7) \text{ m}}{28,3 \text{ kN}}$$

$$= \frac{14 - 36,305 + 159,9}{28,3} \text{ m}$$

$$= 3,26 \text{ m}$$

Vertiefung

Böge 72-82

Statik_TA_allgemein-rechnerisch-Resultierende.odt
Klassenarbeit

Literaturverzeichnis

BadZtg: , Badische Zeitung,

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Aufg.: Alfred Böge ua., Aufgabensammlung Technische Mechanik, 1999

Böge Technologie: Alfred Böge, Technologie/Technik für Fachgymnasien und Fachoberschulen, 1994

Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009

Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009

Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009

Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009

Böge, Techn. Mechanik: Alfred Böge, Technische Mechanik Statik - Dynamik - Fluidmechanik - Festigkeitslehre, 2009

Culmann 1866: Karl Culmann, Die grafische Statik, 1866

EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,

EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,

EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,

EuroRBM: , Europa Rechenbuch Metall,

Ganten 2003: Detlev Ganten ua., Naturwissenschaft - Alles, was man wissen muss, 2003

Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015

Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015

Gross 2015: Dietmar Gross u.a., Technische Mechanik 3, 2015



Kurrer 2002: Karl-Eugen Kurrer, Geschichte der Baustatik, 2002

Müller-Breslau I: Heinrich F.B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 1901

Müller-Breslau I: Heinrich F.B. Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 1901

Schneider21: Andrej Albert ua., Bautabellen für Ingenieure, 21.Auflage,, 2014

SdW: wechselnde Autoren, Spektrum der Wissenschaft,

Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014

Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014

Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014

Skolaut 2014: Werner Skolaut (Hrsg.), Maschinenbau - Ein Lehrbuch für das ganze Bachelor-Studium, 2014

Tipler 1995: Paul Tipler, Physik, 1995